METODI STATISTICI PER LA CARATTERIZZAZIONE DEI PARAMETRI GEOTECNICI

Ing. Ph.D. Riccardo Carioti

Ordine degli Ingegneri della Provincia di Palermo

Revisione del 15/09/2020

RIASSUNTO

Secondo le disposizioni normative europee ed italiane nel campo dell'ingegneria civile, i valori "caratteristici" dei parametri meccanici dei materiali , inclusi i terreni , vanno determinati applicando criteri statistici. Tuttavia nell'ambito dell'ingegneria geotecnica, l'impiego di metodologie statistiche è meno diffuso rispetto agli altri settori dell'ingegneria civile. In questa pubblicazione vengono sinteticamente esaminati e proposti alcuni metodi per la determinazione dei valori "caratteristici" per i parametri meccanici dei terreni , con particolare riferimento ai parametri di resistenza a taglio efficaci .

La presente pubblicazione è una bozza che potrà essere soggetta a successive revisioni e modifiche

BOZZA

1) INTRODUZIONE

1.1) Quadro normativo

Nella progettazione in campo geotecnico, ormai non di rado, i temi ed i concetti pertinenti alla scienza statistica ed al calcolo delle probabilità, possono assumere un ruolo rilevante ad ogni livello della pratica professionale, uscendo dall'ambito della pura teoria o dai contesti della ricerca accademica, con un riscontro, seppur ancora timido, anche a livello normativo, cominciando dall' *Eurocodice 7* (abbr. EC7) (*EN 1997*) .

Qui, nella Parte 1, "*General rules*" al paragrafo **2.4.5.2** "*Characteristic values of geotechnical parameters"* ovvero : *"Valori caratteristici dei parametri geotecnici*" , integralmente di seguito riportato, viene introdotto l'importante concetto di "*valore caratteristico*", definito come "*stima cautelativa dei valori che determinano il verificarsi dello stato limite*" (punto 2). Il testo prevede, senza indicare specifici metodi operativi per la determinazione di tali valori caratteristico, la possibilità d'impiego di metodi statistici.

" 2.4.5.2 Characteristic values of geotechnical parameters

(1)P The selection of characteristic values for geotechnical parameters shall be based on results and derived values from laboratory and field tests, complemented by well-established experience.

(2)P The characteristic value of a geotechnical parameter shall be selected as a cautious estimate of the value affecting the occurrence of the limit state.

(3)P The greater variance of c' compared to that of tanϕ shall be considered when their characteristic values are determined.

(4)P The selection of characteristic values for geotechnical parameters shall take account of the following:
-geological and other background information, such as data from previous projects;
-the variability of the measured property values and other relevant information, e.g. from existing knowledge;
-the extent of the field and laboratory investigation;
- the type and number of samples;
- the extent of the zone of ground governing the behaviour of the geotechnical structure at the limit state being considered;
- the ability of the geotechnical structure to transfer loads from weak to strong zones in the ground.

(5)P Characteristic values can be lower values, which are less than the most probable values, or upper values, which are greater.

(6)P For each calculation, the most unfavourable combination of lower and upper values of independent parameters shall be used.

(7)P The zone of ground governing the behaviour of a geotechnical structure at a limit state is usually much larger than a test sample or the zone of ground affected in an in situ test. Consequently the value of the governing parameter is often the mean of a range of values covering a large surface or volume of the ground. The characteristic value should be a cautious estimate of this mean value.

(8)P If the behaviour of the geotechnical structure at the limit state considered is governed by the lowest or highest value of the ground property, the characteristic value should be a cautious estimate of the lowest or highest value occurring in the zone governing the behaviour.

(9)P When selecting the zone of ground governing the behaviour of a geotechnical structure at a limit state, it should be considered that this limit state may depend on the behaviour of the supported structure. For instance, when considering a bearing resistance ultimate limit state for a building resting on several footings, the governing parameter should be the mean strength over each individual zone of ground under a footing, if the building is unable to resist a local failure. If, however, the building is stiff and strong enough, the governing parameter should be the mean of these mean values over the entire zone or part of the zone of ground under the building.

(10)P If statistical methods are employed in the selection of characteristic values for ground properties, such methods should differentiate between local and regional sampling and shouldallow the use of a priori knowledge of comparable ground properties.

(11)P If statistical methods are used, the characteristic value should be derived such that the calculated probability of a worse value governing the occurrence of the limit state under consideration is not greater than 5%.
NOTE In this respect, a cautious estimate of the mean value is a selection of the mean value of the limited set of geotechnical parameter values, with a confidence level of 95%; where local failure is concerned, a cautious estimate of the low value is a 5% fractile.

(12)P When using standard tables of characteristic values related to soil investigation parameters, the characteristic value shall be selected as a very cautious value. "

Il contesto normativo italiano sullo stesso argomento risulta più articolato, infatti il *DM 14/01/2008*, "*Norme tecniche per le costruzioni*", al capitolo **2** "*Sicurezza e prestazioni attese*" - paragrafo **2.3** "*Valutazione della Sicurezza*" , definisce il valore caratteristico per le resistenze dei materiali strutturali solo in termini statistici, rimandando ad una trattazione separata per i terreni :

" Per la sicurezza strutturale, la resistenza dei materiali e le azioni sono rappresentate dai valori caratteristici, Rki e Fkj definiti, rispettivamente, come il frattile inferiore delle resistenze e il frattile (superiore o inferiore) delle azioni che minimizzano la sicurezza. In genere, i frattili sono assunti pari al

5%. Per le grandezze con piccoli coefficienti di variazione, ovvero per grandezze che non riguardino univocamente resistenze o azioni, si possono considerare frattili al 50% (valori mediani)

Per la sicurezza di opere e sistemi geotecnici i valori caratteristici dei parametri fisico-meccanicisono definiti nel par. 6.2.2. "

Al paragrafo **6.2.2** "*Indagini, caratterizzazione e modellazione geotecnica*" la stessa norma stabilisce quanto segue per i terreni:

"I valori caratteristici delle grandezze fisiche e meccaniche da attribuire ai terreni devono essere ottenuti mediante specifiche prove di laboratorio su campioni indisturbati di terreno e attraverso l'interpretazione dei risultati di prove e misure in sito.

Per valore caratteristico di un parametro geotecnico deve intendersi una stima ragionata e cautelativa del valore del parametro nello stato limite considerato."

Tuttavia, non viene fornita, nel testo, alcuna definizione specifica né altra indicazione per la determinazione di tale valore. La "*Circolare esplicativa del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici*" al paragrafo corrispondente (par.**6.2.2**), riportato integralmente di seguito, recepisce ed interpreta le disposizioni dell' *Eurocodice 7* con alcune differenze, alludendo soltanto, attraverso riferimenti impliciti, alla possibilità di avvalersi di metodi statistici:

" Valori caratteristici dei parametri geotecnici

La scelta dei valori caratteristici dei parametri geotecnici avviene in due fasi.

La prima fase comporta l'identificazione dei parametri geotecnici appropriati ai fini progettuali. Tale scelta richiede una valutazione specifica da parte del progettista, per il necessario riferimento ai diversi tipi di verifica.

Ad esempio, nel valutare la stabilità di un muro di sostegno è opportuno che la verifica allo scorrimento della fondazione del muro sia effettuata con riferimento al valore a volume costante o allo stato critico dell'angolo di resistenza al taglio, poiché il meccanismo di scorrimento, che coinvolge spessori molto modesti di terreno, e l'inevitabile disturbo connesso con la preparazione del piano di posa della fondazione, possono comportare modifiche significative dei parametri di resistenza. Per questo stesso motivo, nelle analisi svolte in termini di tensioni efficaci, è opportuno trascurare ogni contributo della coesione nelle verifiche allo scorrimento. Considerazioni diverse, invece, devono essere svolte con riferimento al calcolo della capacità portante della fondazione del muro che, per l'elevato volume di terreno indisturbato coinvolto, comporta il riferimento al valore di picco dell'angolo di resistenza al taglio, senza trascurare il contributo della coesione efficace del terreno.

Identificati i parametri geotecnici appropriati, la seconda fase del processo decisionale riguarda la valutazione dei valori caratteristici degli stessi parametri.

Nella progettazione geotecnica, in coerenza con gli Eurocodici, la scelta dei valori caratteristici dei parametri deriva da una stima cautelativa, effettuata dal progettista, del valore del parametro appropriato per lo stato limite considerato. Nella scelta dei valori caratteristici è necessario tener conto, come già esposto, della specifica verifica e delle condizioni costruttive che ad essa corrispondono. Riprendendo l'esempio dell'analisi di stabilità di un muro di sostegno, al progettista è richiesta una valutazione specifica dei valori caratteristici dei parametri geotecnici appropriati alle diverse verifiche.

Nelle valutazioni che il progettista deve svolgere per pervenire ad una scelta corretta dei valori caratteristici, appare giustificato il riferimento a valori prossimi ai valori medi quando nello stato limite considerato è coinvolto un elevato volume di terreno, con possibile compensazione delle eterogeneità o quando la struttura a contatto con il terreno è dotata di rigidezza sufficiente a trasferire le azioni dalle zone meno resistenti a quelle più resistenti. Al contrario, valori caratteristici prossimi ai valori minimi dei

parametri geotecnici appaiono più giustificati nel caso in cui siano coinvolti modesti volumi di terreno, con concentrazione delle deformazioni fino alla formazione di superfici di rottura nelle porzioni di terreno meno resistenti del volume significativo, o nel caso in cui la struttura a contatto con il terreno non sia in grado di trasferire forze dalle zone meno resistenti a quelle più resistenti a causa della sua insufficiente rigidezza. La scelta di valori caratteristici prossimi ai valori minimi dei parametri geotecnici può essere dettata anche solo dalle caratteristiche dei terreni; basti pensare, ad esempio, all'effetto delle discontinuità sul valore operativo della resistenza non drenata.

Una migliore approssimazione nella valutazione dei valori caratteristici può essere ottenuta operando le opportune medie dei valori dei parametri geotecnici nell'ambito di piccoli volumi di terreno, quando questi assumano importanza per lo stato limite considerato. "

ARGOMENTO	Eurocodice 7	**DM 14/01/2008** + *Circolare Esplicativa*
DEFINIZIONE	(2)P The characteristic value of a geotechnical parameter shall be selected as a cautious estimate of the value affecting the occurrence of the limit state. (5)P Characteristic values can be lower values, which are less than the most probable values, or upper values, which are greater. (6)P For each calculation, the most unfavourable combination of lower and upper values of independent parameters shall be used.	**Per valore caratteristico di un parametro geotecnico deve intendersi una stima ragionata e cautelativa del valore del parametro nello stato limite considerato.** *…la scelta dei valori caratteristici dei parametri deriva da una stima cautelativa, effettuata dal progettista, del valore del parametro appropriato per lo stato limite considerato…*
DATI DI PARTENZA	(1)P The selection of characteristic values for geotechnical parameters shall be based on results and derived values from laboratory and field tests, complemented by well-established experience. (4)P The selection of characteristic values for geotechnical parameters shall take account of the following: - geological and other background information, such as data from previous projects; - the variability of the measured property values and other relevant information, e.g. from existing knowledge; - the extent of the field and laboratory investigation; - the type and number of samples; - the extent of the zone of ground governing the behaviour of the geotechnical structure at the limit state being considered; - the ability of the geotechnical structure to transfer loads from weak to strong zones in the ground.	*…La prima fase comporta l'identificazione dei parametri geotecnici appropriati ai fini progettuali. Tale scelta richiede una valutazione specifica da parte del progettista, per il necessario riferimento ai diversi tipi di verifica….* *… Nella scelta dei valori caratteristici è necessario tener conto, come già esposto, della specifica verifica e delle condizioni costruttive che ad essa corrispondono. Riprendendo l'esempio dell'analisi di stabilità di un muro di sostegno, al progettista è richiesta una valutazione specifica dei valori caratteristici dei parametri geotecnici appropriati alle diverse verifiche…*

[tab.1-a]

BOZZA

ARGOMENTO	Eurocodice 7	**DM 14/01/2008** + *Circolare Esplicativa*
METODI	(10) If statistical methods are employed in the selection of characteristic values for ground properties, such methods should differentiate between local and regional sampling and should allow the use of a priori knowledge of comparable ground properties. (12)P When using standard tables of characteristic values related to soil investigation parameters, the characteristic value shall be selected as a very cautious value.	NESSUNA PROPOSTA O PRESCRIZIONE ESPLICITA SOLO ALCUNE INDICAZIONI IMPLICITE : *..Nelle valutazioni che il progettista deve svolgere per pervenire ad una scelta corretta dei valori caratteristici, appare giustificato il riferimento a valori prossimi ai valori medi…* *…Al contrario, valori caratteristici prossimi ai valori minimi dei parametri geotecnici appaiono più giustificati…* *… Una migliore approssimazione nella valutazione dei valori caratteristici può essere ottenuta operando le opportune medie dei valori dei parametri geotecnici…*
PRESCRIZIONI APPLICATIVE	(3)P The greater variance of c' compared to that of tanϕ shall be considered when their characteristic values are determined. (11)P If statistical methods are used, the characteristic value should be derived such that the calculated probability of a worse value governing the occurrence of the limit state under consideration is not greater than 5%. NOTE In this respect, a cautious estimate of the mean value is a selection of the mean value of the limited set of geotechnical parameter values, with a confidence level of 95%; where local failure is concerned, a cautious estimate of the low value is a 5% fractile.	*…Ad esempio, nel valutare la stabilità di un muro di sostegno è opportuno che la verifica allo scorrimento della fondazione del muro sia effettuata con riferimento al valore a volume costante o allo stato critico dell'angolo di resistenza al taglio, poiché il meccanismo di scorrimento, che coinvolge spessori molto modesti di terreno, e l'inevitabile disturbo connesso con la preparazione del piano di posa della fondazione, possono comportare modifiche significative dei parametri di resistenza. Per questo stesso motivo, nelle analisi svolte in termini di tensioni efficaci, è opportuno trascurare ogni contributo della coesione nelle verifiche allo scorrimento. Considerazioni diverse, invece, devono essere svolte con riferimento al calcolo della capacità portante della fondazione del muro che, per l'elevato volume di terreno indisturbato coinvolto, comporta il riferimento al valore di picco dell'angolo di resistenza al taglio, senza trascurare il contributo della coesione efficace del terreno.*

[tab.1-b]

BOZZA

ARGOMENTO	Eurocodice 7	**DM 14/01/2008** + *Circolare Esplicativa*
GRANDI VOLUMI SIGNIFICATIVI DI TERRENO	(7)P The zone of ground governing the behaviour of a geotechnical structure at a limit state is usually much larger than a test sample or the zone of ground affected in an in situ test. Consequently the value of the governing parameter is often the mean of a range of values covering a large surface or volume of the ground. The characteristic value should be a cautious estimate of this mean value. (9)P When selecting the zone of ground governing the behaviour of a geotechnical structure at a limit state, it should be considered that this limit state may depend on the behaviour of the supported structure. For instance, when considering a bearing resistance ultimate limit state for a building resting on several footings,….If… the building is stiff and strong enough, the governing parameter should be the mean of these mean values over the entire zone or part of the zone of ground under the building	*..Nelle valutazioni che il progettista deve svolgere per pervenire ad una scelta corretta dei valori caratteristici, appare giustificato il riferimento a valori prossimi ai valori medi quando nello stato limite considerato è coinvolto un elevato volume di terreno, con possibile compensazione delle eterogeneità o quando la struttura a contatto con il terreno è dotata di rigidezza sufficiente a trasferire le azioni dalle zone meno resistenti a quelle più resistenti*
PICCOLI VOLUMI SIGNIFICATIVI DI TERRENO	(8)P If the behaviour of the geotechnical structure at the limit state considered is governed by the lowest or highest value of the ground property, the characteristic value should be a cautious estimate of the lowest or highest value occurring in the zone governing the behaviour (9)P When selecting the zone of ground governing the behaviour of a geotechnical structure at a limit state, it should be considered that this limit state may depend on the behaviour of the supported structure. For instance, when considering a bearing resistance ultimate limit state for a building resting on several footings, the governing parameter should be the mean strength over each individual zone of ground under a footing, if the building is unable to resist a local failure.	*…Al contrario, valori caratteristici prossimi ai valori minimi dei parametri geotecnici appaiono più giustificati nel caso in cui siano coinvolti modesti volumi di terreno, con concentrazione delle deformazioni fino alla formazione di superfici di rottura nelle porzioni di terreno meno resistenti del volume significativo, o nel caso in cui la struttura a contatto con il terreno non sia in grado di trasferire forze dalle zone meno resistenti a quelle più resistenti a causa della sua insufficiente rigidezza. La scelta di valori caratteristici prossimi ai valori minimi dei parametri geotecnici può essere dettata anche solo dalle caratteristiche dei terreni; basti pensare, ad esempio, all'effetto delle discontinuità sul valore operativo della resistenza non drenata.* *Una migliore approssimazione nella valutazione dei valori caratteristici può essere ottenuta operando le opportune medie dei valori dei parametri geotecnici nell'ambito di piccoli volumi di terreno, quando questi assumano importanza per lo stato limite considerato. "*

[tab.1-c]

BOZZA

Dalla comparazione sinottica (tab.**1-a**,**b** e **c)** tra l'*Eurocodice 7*, il *DM 14/01/2008* "*Norme tecniche per le costruzioni*" e relativa "*Circolare esplicativa del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici*", emerge che entrambe le normative definiscono il valore caratteristico come: una "*stima cautelativa del parametro nello stato limite considerato*" (tab.**1-a**). La normativa italiana prevede che tale stima oltre che "*cautelativa*" debba essere "*ragionata*". L'espressione "*Stima cautelativa*", se tradotta in termini matematici, indica che la probabilità che si verifichino condizioni peggiori per la sicurezza rispetto a quelle assunte deve essere inferiore alla probabilità che si verifichino condizioni di sicurezza effettivamente migliori di quelle assunte.

Ad esempio, se nel tipo di verifica considerata (*lo stato limite considerato*), la resistenza risulta proporzionale al valore di un dato parametro "**x**": questo agisce a favore di sicurezza ed il valore "$\mathbf{x_k}$" , assunto come *valore caratteristico,* rappresenta l'ipotesi di partenza: $\mathbf{x > x_k}$ con $\mathbf{R(x_k) > E}$. Quindi in condizioni di *cautela*, la probabilità di superamento del valore "$\mathbf{x_k}$", che in genere indicata come "$\mathbf{1-\alpha}$", rappresenta la probabilità che si verifichi: la condizione $\mathbf{x > x_k}$ e sicuramente anche la condizione **R(x) > E.** Questa è anche indicata come il "$(1-\alpha)°$ *percentile superiore*" della distribuzione statistica dei valori **x** o come il livello di *confidenza* , ovvero fiducia nell'ipotesi $\mathbf{x > x_k}$. La probabilità "$\mathbf{1-\alpha}$" deve essere maggiore di quella di non superamento "α" ($(1-\alpha) > \alpha$) , che rappresenta la probabilità che si verifichi la condizione: $\mathbf{x \leq x_k}$, ovvero che la condizione di sicurezza "**R(x) > E**" non sia in generale verificata (la condizione non è verificata per tutti i valori $\mathbf{x <= x_k}$). Questa è anche indicata come *"$\alpha°$ percentile inferiore*" della distribuzione statistica dei valori **x**, o come livello di "*significatività*" o probabilità di assumere vera l'ipotesi "$\mathbf{x > x_k}$" quando invece non è verificata.

Ritornando alla definizione secondo il *DM 14/01/2008***,** per "*stima ragionata*" dovrebbe intendersi scelta operata secondo un criterio o un procedimento di cui si può rendere conto nella relazione geotecnica.

Per quanto riguarda i dati da cui ricavare i valori caratteristici (tab.**1-a**), l'*Eurocodice 7*, auspica che essi siano il risultato di prove di laboratorio e prove in sito e che si tenga anche conto del contesto geologico, del numero e tipo di campioni di terreno testati, della variabilità dei valori misurati e della capacità delle opere di ripartire i carichi trasmessi al terreno. La *Circolare Esplicativa* del *DM 14/01/200,* prevedendo in altri paragrafi lo studio della geologia del sito di costruzione e l'effettuazione di prove geotecniche in sito ed in laboratorio, riguardo le informazioni necessarie su cui basare la scelta dei valori caratteristici, sottolinea l'importanza di tenere conto del tipo specifico di verifica da effettuare.

Sui metodi per la determinazione dei valori caratteristici (tab.**1-b**), L'*Eurocodice 7*, fa esplicito riferimento alla possibilità di impiegare metodi statistici tenendo, in considerazione i diversi livelli di qualità delle informazioni disponibili. La *Circolare Esplicativa del DM 14/01/2008* invece, non fa riferimento esplicito ad alcun metodo di scelta, tuttavia il ricorrere di termini ed espressioni come: "*stima cautelativa*" , "*media*" e "*valore medio*"; implica l'impiego, almeno ad un livello elementare, di metodologie statistiche.

In caso di impiego di metodi statistici (tab.**1-b**), l'*Eurocodice 7* raccomanda che i valori caratteristici siano scelti in modo tale che la probabilità che sessi possano determinare condizioni di sicurezza peggiori rispetto a quelle considerate, non sia maggiore del 5%. Per cui, se lo stato limite considerato dipende dai valori *medi* assunti dai parametri geotecnici, i valori caratteristici andranno scelti tra i valori *medi* a cui corrisponde un livello di *confidenza* maggiore del **95%** ($\mathbf{1-\alpha > 95\%}$), ovvero che : la probabilità di *non superamento* sia minore o uguale del **5 %** (*significatività* $\alpha \leq 5\%$)**,** se parametri vanno a vantaggio della sicurezza , all'opposto, probabilità di *superamento* maggiore o uguale del 5% (*significatività* $\alpha \geq 5\ \%$) , se gli stessi vanno a svantaggio della sicurezza**.** In caso di fenomeni di rottura locale, essi andranno scelti tra i valori dei parametri (e non tra i valori *medi)* corrispondenti agli stessi valori di *significatività* o *confidenza.* La *Circolare Esplicativa del DM 14/01/2008* non fornisce prescrizioni in termini di probabilità superamento associate ai valori caratteristici.

Se i volumi di terreno influenzati dai carichi trasmessi dall'opera sono grandi e le strutture hanno una rigidezza tale da ripartire adeguatamente i carichi sul terreno di fondazione, entrambe le norme prevedono che i valori caratteristici rappresentino una stima cautelativa dei valori *medi* assunti dai parametri geotecnici. Se i volumi significativi sono piccoli o le strutture portano a concentrazioni locali dei carichi, i valori caratteristici rappresenteranno le stime dei valori minimi o massimi assunti dai parametri, in dipendenza dal loro ruolo a favore o sfavore di sicurezza, o dai valori *medi* locali (tab.**1-c**).

In conclusione, mentre l'*Eurocodice 7* , prevede esplicitamente il ricorso a metodi statistici per la scelta dei valori caratteristici dei parametri geotecnici, fissando anche dei valori di probabilità limite di riferimento, la normativa italiana costituita dal *DM 14/01/2008* e soprattutto dalla sua *Circolare Esplicativa* sembra evadere qualsiasi richiamo diretto a specifiche modalità di scelta, suggerendo tuttavia un implicito ricorso a qualche forma di calcolo statistico. Quindi se l'*Eurocodice 7*, non obbliga ma suggerisce attivamente l'impiego di metodologie statistiche, dando anche delle linee guida essenziali, la normativa

italiana lascia progettista totalmente libero nel criterio di scelta dei parametri caratteristici.

In caso di impiego di metodi statistici, la normativa italiana non suggerisce valori probabilistici di riferimento nella scelta dei valori caratteristici, sia perché l'argomento non viene affrontato nella *Circolare Esplicativa*, sia perché il *DM 14/01/2008* al paragrafo **2.3** "*Valutazione della Sicurezza*" esclude i terreni dai materiali per i quali i parametri di resistenza vanno definiti necessariamente in termini probabilistici. D'altro canto i valori di probabilità limite proposti dall'*Eurocodice 7* e dallo stesso *DM 14/01/2008* ma solo per i materiali strutturali (probabilità di non superamento ≤ 5% per i valori di resistenza , probabilità di superamento del ≥ 5% per i parametri che determinano le azioni), costituiscono comunque un riferimento ineludibile in caso di impiego di procedure statistiche anche nel contesto italiano.

1.2) Diffusione dei metodi statistici per la caratterizzazione dei parametri geotecnici

Per quanto l'applicazione di metodologie statistiche per la stima di valori caratteristici dei parametri geotecnici, risulti, ad oggi, scarsamente applicata e non unanimemente accettata, sia per timore di una riduzione del ruolo del professionista a semplice operatore di procedure matematiche (*L.Nori-2009*), sia per la scarsa diffusione, nell'ambito dell'ingegneria civile, delle conoscenze, più o meno avanzate, di statistica inferenziale necessarie ad affrontare il problema, essa rappresenta, nelprocesso decisionale del progettista, la via in assoluto meno soggettiva e meglio riproducibile in senso scientifico.

L'impiego di metodi statistici, anche in campo geotecnico, colmerebbe, tra l'altro, il divario creatosi con altre discipline ingegneristiche nell'ambito civile, come l'ingegneria strutturale e sismica e l'idrologia, dove metodologie statistiche, sia elementari che avanzate, vengono correntemente applicate per affrontare problemi formalmente analoghi (vedi, ad esempio, il, già citato, paragrafo **2.3** del *DM 14/01/2008* ".

Per quanto riguarda l'esperienza dello scrivente, l'applicazione dei metodi descritti in questa pubblicazione, è diventata pratica di routine, nella redazione di ogni relazione geotecnica, facilitata dalla creazione di un apposito kit di applicazioni MS Excell® per lo studio e le applicazioni statistiche ai parametri geotecnici . Tuttavia, l'accoglienza da parte degli altri professionisti e degli accademici, riguardo l'approccio statistico personalmente seguito, nella caratterizzazione delle *unità geotecniche* , è stato quasi sempre accolto con un misto di freddezza e scetticismo, nei fatti confermando quanto riportato in *L.Nori -2009* .

Le principali osservazioni critiche che vengono sovente mosse, riguardano la perdita di tempo nell'applicazione di procedure matematiche, che spesso non portano a risultati differenti, ai fini pratici, rispetto alla scelta di valori caratteristici prossimi o coincidenti ai valori minimi campionari. Altre volte, in contrasto con l'orientamento precedente, viene osservato, come l'applicazione di metodi statistici , secondo l'orientamento delle normative in vigore, porti a valori dei parametri caratteristici eccessivamente cautelativi e quindi ad un inutile sovradimensionamento delle opere. E' opinione di chi scrive, che entrambe le tipologie di affermazioni tradiscono, un agire discrezionale e soggettivo, nel porre le basi della modellazione matematica del terreno, non più giustificato dal generale livello qualitativo e tecnologico raggiunto nei processi di progettazione odierni.

L'applicazione di criteri oggettivi e codificati, nella determinazione dei valori caratteristici dei parametri geotecnici, dovrebbe rappresentare una scelta volta ad incrementare il livello di affidabilità nella progettazione , oltre che una garanzia per il progettista nel caso in cui l'opera subisca dei danni. Infatti i criteri di verifica non forniscono di per sé risultati veritieri, ma soltanto risultati formalmente corretti . La veridicità dei risultati dipende dalla veridicità delle premesse. Tanto meno arbitrarie saranno le ipotesi di partenza, tanto più realistici saranno i risultati delle verifiche

I metodi decritti nel seguito di questa pubblicazione possono essere applicati, per la stima, dei valori *caratteristici* dei parametri geotecnici più rilevanti : $\boldsymbol{\phi_k}$, $\mathbf{c'_k}$, $\mathbf{c_{u\text{-}k}}$, $\mathbf{E_k}$, $\mathbf{E_{ed\text{-}k}}$, $\boldsymbol{\gamma'_k}$, $\boldsymbol{\gamma_{sat\text{-}k}}$.

2) PRINCIPI GENERALI

2.1) Il campione delle misure di un parametro

E' noto come tutti i parametri meccanici di un terreno, anche quando esso costituisce un'unica unità geotecnica, varino da punto a punto, anche in maniera discontinua, assumendo una molteplicità di valori in virtù dell'origine, composizione, struttura e collocazione spaziale del terreno stesso.

La distribuzione di tali parametri all'interno di un volume di terreno, segue funzioni rappresentabili sia in termini discreti, ossia come successione di frequenze di valori ricadenti in determinati intervalli, sia in termini di funzioni continue di densità di probabilità e probabilità di massa. Queste funzioni di distribuzione rappresentano delle incognite. Lo studio della distribuzione statistica della "*popolazione*" dei valori di un parametro geotecnico, qualora lo si voglia affrontare, può solo avvenire attraverso lo studio di uno o più insiemi finiti, e solitamente piuttosto piccoli, di *misure* dei parametri d'interesse, ottenuti mediante sistemi e procedimenti omogenei, detti "*campioni delle misure*".

Ciascuna misura, nel caso di prove di laboratorio, viene effettuata su un piccolo elemento di terreno, a sua volta estratto da un campione prelevato durante i sondaggi svolti in sito, che piò essere grande anche nell'ordine anche di un milionesimo del volume fisicamente influenzato dall'opera.

Per *misura* si intende un processo empirico volto all'attribuzione di un valore numerico ad un parametro. La *misura* di una grandezza non coincide con la grandezza stessa. La *misura* è una grandezza correlata alla grandezza che si vuole conoscere. E' quindi quasi superfluo affermare che la misura di una grandezza, non coincide con il reale valore della grandezza stessa, ma ne è una stima, ovvero una sua approssimazione. Infatti il procedimento di misura, essendo un processo conoscitivo operato attraverso il confronto e la similitudine, vale a dire per comparazione tra oggetti simili e non coincidenti, introduce una certa quantità di *incertezza*. Questa può essere fatta risalire a tre categorie di errori inevitabili, seppur gestibili : gli "*errori sistematici"* , gli "*errori accidentali"* e gli "*errori di approssimazione*".

Gli *errori sistematici*, sono dovuti alle caratteristiche strutturali di ciascun sistema di misura e ne determinano l'*accuratezza*, ossia quanto la *media* aritmetica "**m**" di un numero ipoteticamente infinito di misure "$\mathbf{x_i}$" di una stessa grandezza, si discosta dal suo reale valore "$\mathbf{x_r}$". Non essendo possibile conoscere il valore reale "$\mathbf{x_r}$", né tantomeno misurare una grandezza infinite volte, l'*errore sistematico* viene stimato per confronto, tra la *media* di un campione relativamente grande di misure di una stessa grandezza, effettuato con il sistema di misura oggetto di valutazione, e la *media* "$\mathbf{m_{rif}}$" ($\mathbf{m_{rif} = \Sigma\, x_{rif\text{-}i}/n}$), di un campione di misure effettuate con un sistema di riferimento, ritenuto più affidabile, che in genere viene impiegato per tarare il primo. La stima dell'*errore sistematico*, "$\mathbf{e_s}$", è spesso riportata dai produttori degli strumenti, in termini o assoluti o percentuali, ed indica la distanza, positiva o negativa su cui tende a collocarsi il valore reale "$\mathbf{x_r}$", rispetto alla *media* "**m**" di un campione di almeno tre misurazioni. In genere *l'errore sistematico* di uno strumento di misura affidabile, non dovrebbe eccedere il ± 5%. Per quanto espresso sopra , l'errore sistematico può essere espresso matematicamente come il limite, per un numero di misure tendente all'infinito, della differenza tra la *media* "**m**" di una serie di "**n**" misure "$\mathbf{x_i}$" ed il valore *reale* del parametro "$\mathbf{x_r}$" , se questo fosse noto, : $\mathbf{e_s = \lim_{n\to\infty} [\, (\Sigma\, x_i/n) - x_r \,] \approx \lim_{n\to\infty} [\, (\Sigma\, x_i/n) - (\Sigma\, x_{i\text{-}rif}/n) \,]}$. Il termine incertezza sistematica "$\mathbf{s_s}$", va riferito al valore assoluto dell' errore sistematico ($\mathbf{s_s = |e_s|}$) . Questa grandezza , priva dell'informazione sul segno dell'errore , indica il raggio su cui tende a collocarsi il valore reale rispetto alla *media* delle misure effettuate. E' importante ricordare che l'*errore sistematico* e *incertezza sistematica* "$\mathbf{s_s}$" sono sempre riferiti alla *media* del campione di misure e non al singolo valore del campione.

Gli *errori accidentali* sono dovuti all'interazione, di natura casuale, tra il sistema di misura ed il suo contesto operativo, ad esempio : le condizioni dell'oggetto su cui operare la misura, le variabili micro-climatiche ed ambientali e i vari fattori umani connessi agli operatori. Questi errori non sono determinabili o prevedibili a priori, tuttavia la loro natura di eventi generati da molteplici cause, nessuna delle quali prevalente, ne rende la loro distribuzione, nell'ipotesi di una reiterazione della misura, simmetrica rispetto ad un valore centrale, che verrà assunto come miglior stima della grandezza. La dispersione delle singole misure intorno al valore centrale (valore *medio*), determina la *precisione* del sistema di misura. La stima degli *errori accidentali*, data la loro caratteristica "*oscillazione*" rispetto ad un valore centrale , che rende priva di senso la determinazione di un segno positivo o negativo , viene stimata attraverso l' "*incertezza standard*" "$\mathbf{s_a}$". Questa, per conseguenza della *teoria della propagazione degli errori per i valori medi delle grandezze iniziali di Gauss*, viene espressa come *deviazione standard* delle misure effettuate "$\mathbf{s_c}$" diviso la radice quadrata del numero "**n**" di misure : $\mathbf{s_a = s_c/n^{0,5}}$. In genere la pratica scientifica e tecnica applicata nei più svariati campi, suggerisce, ove possibile, di ripetere una misura un minimo di tre volte ed assumere la *media* aritmetica "**m**" come miglior stima del valore della grandezza.

E' bene tenere presente che in alcuni casi l'appartenenza di un errore alla categoria *strutturale* o *accidentale* non è assoluta ma dipendente dal contesto operativo, poiché non è sempre netta la frontiera tra il sistema di misura e l'ambiente circostante. Ad esempio gli eventuali errori di taratura di una scala di lettura di uno strumento, sono *strutturali*, relativamente alle misurazioni operate con lo stesso strumento nel tempo che intercorre tra un'operazione di taratura e la successiva. Mentre gli stessi sono errori accidentali se le misurazioni avvengono all'interno di più intervalli di taratura. Un altro esempio è dato dagli errori determinati dall'interazione di uno strumento con l'ambiente circostante che non si distribuiscono

simmetricamente rispetto al valore reale. In questo caso per quanto si tratti di errori concettualmente *accidentali*, matematicamente presentano una parte *sistematica* che non viene eliminata operando la *media* aritmetica dei valori di più misure.

Operativamente andranno trattati, come *errori sistematici* gli errori i cui effetti non possono essere ridotti operando *medie* aritmetiche di più misure e come *errori accidentali* quelli che tendono, invece, a ridursi con il medesimo procedimento.

Gli *errori di approssimazione*, sono dovuti alla necessità di troncare la serie delle cifre numeriche che esprime il valore di una misurazione ad un dato numero di cifre significative, per i limiti di sensibilità o di capacità di risoluzione imposti della strumentazione. Tali approssimazioni possono aversi sia per eccesso che per difetto, in genere senza possibilità di poterlo determinare apriori, e quindi, come nel caso degli *errori accidentali*, si avrà un' "*oscillazione*" delle varie misure rispetto ad un valore centrale , che rende priva di senso la determinazione di un segno positivo o negativo per *l'errore di approssimazione*. Questo viene stimato attraverso l' "*incertezza di approssimazione numerica*" "$\mathbf{s_n}$" . Tale incertezza, è pari alla *deviazione standard* di una distribuzione continua valori reali equiprobabili, compresi tra 0 ed 1, cioè pari a **0,289** (= $[1/ 12]^{0,5}$) , moltiplicato $\mathbf{10^{-j}}$, dove "**j**" è il numero di cifre decimali significative della misurazione effettuata, quindi si ha : $\mathbf{s_n = 2,89 \cdot 10^{-(j-1)}}$. L' *incertezza di approssimazione* della *media* di un campione "$\mathbf{s_{nm}}$" costituito da "**n**" misure sarà pari ad "$\mathbf{s_n}$" diviso la radice quadrata di "**n**" di misure : $\mathbf{s_{mn} = s_n/n^{0,5} = 2,89 \cdot 10^{-(j-1)} / n^{0,5}}$. Per quanto il tenere conto di questo tipo di *incertezza* possa sembrare eccessivamente scrupoloso per le applicazioni geotecniche, tuttavia, come si vedrà nel seguito, si dimostrerà utile per la composizione di campioni derivati da misurazioni effettuate con sistemi diversi.

Le *incertezze* introdotte, tranne quella di *approssimazione*, presuppongono una ripetizione della misura, per un certo numero volte, il cui numero minimo, in molti ambiti tecnici e scientifici è fissato in tre volte.

L'*incertezza* complessiva di una serie di misure (*sistematica* più *accidentale* più di *approssimazione*) è, in conseguenza della teoria di "*propagazione degli errori per i valori medi delle grandezze iniziali"* di *Gauss*, pari alla radice quadrata della somma dei quadrati dell'*incertezza sistematica* "$\mathbf{s_s}$", dell' *incertezza standard* (o *accidentale*) "$\mathbf{s_a}$" e *dell'incertezza di approssimazione della media* "$\mathbf{s_n}$" : $\mathbf{s = (s_s^{\ 2} + s_a^{\ 2} + s_{mn}^{\ 2})^{0,5}}$. La stima del parametro "**x**" si può quindi esprimere come : $\mathbf{x \approx m \pm s}$.

Tuttavia se è noto l'errore sistematico "$\mathbf{e_s}$", comporre l'*incertezza sistematica* con l'*incertezza standard* (*accidentale*) e l'*incertezza di approssimazione*, comporta una perdita di informazione utile. In questo caso la stima di "**x**" andrebbe espressa come : $\mathbf{x \approx m - e_s \pm (s_a^{\ 2} + s_{mn}^{\ 2})^{0,5}}$.

Oltre alle *incertezze* dovute al processo di misurazione, è necessario ricordare che un'altra fonte d'*incertezza* è determinata dalle condizioni di prelievo dei campioni in sito. Per quest'ultima *incertezza*, purtroppo, non è possibile fornire un criterio di stima, se non quello di eliminare dal campione delle misure quei valori che risultano "anomali", sia perché troppo bassi sia perché troppo alti, detti "*outliers*", che possono essere identificati attraverso processi matematici ben codificati. Ciò, comunque, comporta il rischio di una possibile perdita, anche cruciale, di informazioni sul terreno. Per il resto l'*incertezza* dovuta alle condizioni di prelievo dei campioni viene inglobata nell' incertezza *accidentale* del processo di misurazione.

E' importante sottolineare , che l'ipotesi di omogeneità del terreno costituente una stessa *unità geotecnica*, fondamentale ai fini della modellazione matematica, implica il trasferimento concettuale dell'*incertezza* legata alla variabilità intrinseca delle caratteristiche meccaniche, di fatto presente anche all'interno di un complesso regolare ed uniforme, verso il processo di misurazione . Ossia, la variabilità dei parametri all'interno della stessa *unità geotecnica*, stante l'ipotesi di omogeneità, verrà formalmente trattata come *incertezza* inerente al processo di misurazione. In termini equivalenti, l'ipotesi di omogeneità implica che : se il processo di misurazione fosse perfetto, otterremmo misure identiche dello stesso parametro all'interno della stessa *unità geotecnica*. Per tenere conto degli effetti temibili dell' effettiva eterogeneità dei terreni, si assumeranno nella modellazione matematica, come stabilito dalle normative, valori *caratteristici* dei parametri, corrispondenti a specifiche probabilità di superamento.

Ritornando all'obiettivo iniziale, cioè lo studio della distribuzione dei valori dei parametri meccanici all'interno di un volume di terreno, appartenente ad un'unica *unità geotecnica*, si deve ricorrere, come già accennato, ad almeno un campione di misure " **c**". Tuttavia, data la natura sostanzialmente distruttiva o irripetibile delle prove geotecniche, non è possibile sottoporre lo stesso elemento di terreno (provino) a più processi di misura, senza alterarne la "*storia*" e perdere così informazioni cruciali sul terreno da cui è stato estratto. *L'incertezza sistematica* e l'*incertezza standard* relativa alle misure del parametro "**x**"

effettuabili su un singolo elemento "**i**" di terreno (o *provino*), restano così generalmente incognite. Il campione di misure "**c**" sarà allora costituito da misure svolte su elementi di terreno distinti, ma appartenenti ad un volume giudicato omogeneo dal punto di vista geotecnico (*unità geotecnica*) : $\mathbf{c = \{ x_1 , \dots , x_i , \dots, x_n \}}$. La misura dello stesso parametro, operata su una molteplicità elementi appartenenti alla stessa unità geotecnica, utilizzando la stessa strumentazione di cui è noto l'errore sistematico "$\mathbf{e_s}$", consentirebbe, in linea di principio, l'espressione matematica del parametro "**x**" ,oggetto di stima, nei termini della somma di un valore *medio* "$\mathbf{m_c}$", di un *errore sistematico* "$\mathbf{e_s}$" e di un'*incertezza* "$\mathbf{s_{mc}}$" (comprendente l'*incertezza standard* e *l'incertezza di approssimazione* : $\mathbf{s_{mc} \equiv [s_a{}^2 + s_{mn}{}^2]^{0,5}}$) ; $\mathbf{x \approx x_c = m_c - e_s \pm s_{mc}}$. Nel dettaglio, il legame tra il campione di misure su elementi diversi : $\mathbf{c := \{ x_1 , \dots , x_i , \dots , x_n \}}$ e la stima del parametro "**x**" è data, alternativamente, dalle espressioni :

$$x \approx x_c = m_c - e_s \pm s_{m_c} = m_c - e_s \pm \sqrt{\left(s_c \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(s_n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} =$$

[eq.1-a]

$$= \sum_1^n \frac{x_i}{n} - e_s \pm \sqrt{\left(\sqrt{\sum_1^n \frac{(x_i - m_c)^2}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(2{,}89 \cdot 10^{-(j-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$x \approx x_c = m_c \pm s_{m_c} = m_c \pm \sqrt{\left(s_c \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + (s_s)^2 + \left(s_n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} =$$

[eq.1-b]

$$= \sum_1^n \frac{x_i}{n} \pm \sqrt{\left(\sqrt{\sum_1^n \frac{(x_i - m_c)^2}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + (s_s)^2 + \left(2{,}89 \cdot 10^{-(j-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

Dove :

x è il valore del parametro oggetto di stima

$\mathbf{x_c}$ indica la stima di **x** , ossia una sua approssimazione espressa come l'intervallo ($\mathbf{x \approx x_c = m_c + e_s \pm s_{mc}}$) entro cui esso ricade

$\mathbf{x_i}$, è la singola misura effettuata su un distinto elemento **i** e costituente il campione di misure c

n è la cardinalità del campione **c**, ossia il numero di misure $\mathbf{x_i}$ che lo compongono

$\mathbf{m_c}$ è il valore medio delle misure $\mathbf{x_i}$, ciascuna effettuata su un distinto elemento **i** e costituente il campione $\mathbf{c := \{ x_1 , \dots , x_i , \dots , x_n \}}$

$\mathbf{s_c}$ è la deviazione standard del campione **c**

$\mathbf{s_{mc}}$ è la deviazione standard della media $\mathbf{m_c}$, ovvero l'incertezza complessiva

BOZZA

$\mathbf{e_s}$ è l'errore sistematico della media $\mathbf{m_c}$

$\mathbf{s_s}$ è l'incertezza sistematica della media $\mathbf{m_c}$, $\mathbf{s_s} = |\,\mathbf{e_s}\,|$

$\mathbf{s_a}$ è l'incertezza accidentale o standard della media $\mathbf{m_c}$ pari a $\mathbf{s_c} / (\mathbf{n})^{0,5}$

$\mathbf{s_n}$ è l'incertezza di approssimazione (numerica) delle misure $\mathbf{x_i}$

j è il numero di cifre decimali significative delle misure $\mathbf{x_i}$

Nell' eq. **1-a**, il valore del parametro "**x**" rappresentativo per il campione di misure "**c**" di cardinalità "**n**" (numero di misure di cui è costituito il campione) viene stimato pari alla *media* aritmetica dei valori delle singole misure "$\mathbf{m_c}$" (*media* campionaria) meno l'eventuale *errore sistematico* "$\mathbf{e_s}$", più o meno la radice quadrata della somma dei quadrati : della *deviazione standard* del campione di misure "$\mathbf{s_c}$" fratto $\sqrt{\boldsymbol{n}}$ (*deviazione standard* della *media* campionaria $\mathbf{m_c}$) e dell' *incertezza di approssimazione* "$\mathbf{s_n}$" fratto $\sqrt{\boldsymbol{n}}$ (*incertezza di approssimazione* della *media* campionaria $\mathbf{m_c}$). Questa grandezza complessivamente indicata come "$\mathbf{s_{mc}}$" è la *deviazione standard* della *media* campionaria "$\mathbf{m_c}$". Nell' equazione "**1-b**" , invece dell'*errore sistematico* " $\mathbf{e_s}$", è nota *l'incertezza sistematica* "$\mathbf{s_s}$", quest'ultima va composta con *l'incertezza standard* (o *incertezza accidentale*) e con *l'incertezza di approssimazione della media* "$\mathbf{s_{mn}}$", per cui : $\mathbf{s_{mc} = (s_s{}^2 + s_a{}^2 + s_{mn}{}^2)^{0,5}}$. in entrambi i casi si ha che : $\mathbf{x \approx x_c = m_c \pm s_{mc}}$.

Se si dispone di un numero "$\mathbf{N_c}$" di campioni di *misure* diversi, per uno stesso parametro "**x**", relativo alla stessa *unità geotecnica*, effettuate con sistemi di misura diversi , è sempre possibile giungere ad un unico valore "$\mathbf{x_{c*}}$" (= $\mathbf{m_{c*} \pm s_{mc*}}$), rappresentativo per il campione complessivo "**c***", applicando la teoria della *propagazione degli errori per i valori medi delle grandezze iniziali* di *Gauss* mediante l'introduzione di pesi " $\mathbf{p_c}$" che tengono conto della diversa affidabilità dei sistemi di misura :

$$x \approx x_{c^*} = m_{c^*} \pm s_{m_{c^*}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_1^{N_c} p_c\,(m_c - e_{s_c})}{\sum_1^{N_c} p_c}}_{m_{c*}} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{\sum_1^{N_c} p_c{}^2 \left(\left((m_c - e_{s_c}) - m_{c^*} \right)^2 + s_{s_c}^2 + \left(\frac{s_c}{\sqrt{n_c}} \right)^2 + \left(\frac{s_{n_c}}{\sqrt{n_c}} \right)^2 \right)}{\left(\sum_1^{N_c} p_c \right)^2}}}_{s_{mc*}} = \qquad \text{[eq.2]}$$

$$= \underbrace{\frac{\sum_1^{N_c} p_c\,(m_c - e_{s_c})}{\sum_1^{N_c} p_c}}_{m_{c*}} \pm \underbrace{\underbrace{\sqrt{\frac{\sum_1^{N_c} p_c \left(\left((m_c - e_{s_c}) - m_{c^*} \right)^2 + s_{s_c}^2 + s_c^2 + s_{n_c}^2 \right)}{\left(\sum_1^{N_c} p_c \right)}}}_{s_{c*}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^*}}}_{1/\sqrt{n*}}}_{s_{mc*}}$$

$$n^* = \frac{\left(\sum_1^{N_c} p_c\right) \cdot \sum_1^{N_c} p_c \left(\left((m_c - e_{s_c}) - m_{c^*}\right)^2 + s_{s_c}^2 + s_c^2 + s_{n_c}^2\right)}{\sum_1^{N_c} p_c{}^2 \left(\left((m_c - e_{s_c}) - m_{c^*}\right)^2 + s_{s_c}^2 + \left(\frac{s_c}{\sqrt{n_c}}\right)^2 + \left(\frac{s_{n_c}}{\sqrt{n_c}}\right)^2\right)} \qquad \text{[eq.3]}$$

Dove :

se $\mathbf{e_{sc} \neq 0}$: $\mathbf{s_{sc} = 0}$; se $\mathbf{s_{sc} \neq 0}$: $\mathbf{e_{sc} = 0}$; se $\mathbf{e_{sc}}$ e $\mathbf{s_{sc}}$ sono incogniti : $\mathbf{e_{sc} = s_{sc} = 0}$

n* rappresenta la cardinalità complessiva equivalente del campione complessivo **c*** , si ha che **:** $\mathbf{\min [\sum n_c ; N_c] \geq n^* \leq \max [\sum n_c ; N_c]}$ e per $\mathbf{s_{mc}}$ che tende ad ∞ si ha che**:** $\mathbf{\lim_{s\text{-}mc \to \infty} n^* = N_c}$ e $\mathbf{\lim_{s(mc) \to 0} n^* = \sum n_c}$, dove $\mathbf{s_{mc}}$ è la deviazione standard delle *medie* campionarie $\mathbf{m_c}$.

L'eq.**2** è espressa nei termini più generali possibili, visto che tiene conto anche degli eventuali *errori sistematici* "$\mathbf{e_{sc}}$" o *incertezze sistematiche* "$\mathbf{s_{sc}}$" dei vari campioni, qualora fossero noti, cosa che in genere non accade nelle applicazioni geotecniche.

La *cardinalità* "**n***" del campione complessivo "**c***" (eq.**3**) è compresa tra la somma delle *cardinalità* dei singoli campioni "**c**" ed il numero di campioni distinti "$\mathbf{N_c}$". "**n***" tende ad "$\mathbf{N_c}$", all'aumentare della dispersione delle *medie* campionarie "$\mathbf{m_c}$", mentre tende al valore "$\sum \mathbf{n_c}$**"** all' annullarsi di tale dispersione.

I pesi "$\mathbf{p_c}$" rappresentano una misura dell'affidabilità relativa di ciascun sistema di misura, sia in termini di *accuratezza* che di *precisione*. I pesi "$\mathbf{p_c}$" possono anche essere pensati come la *misura* del contenuto relativo di informazione in ciascun campione "**c**".

La scelta dei pesi "$\mathbf{p_c}$" può essere effettuata seguendo criteri qualitativi o secondo criteri matematici. Tra quest'ultimi, i criteri più diffusi appartengono alla famiglia dei metodi "*Inverse Distance Weighting*", o "*IDW*" , che consistono nel porre i pesi , pari o proporzionali , ad una misura di dispersione dei valori campionari .

In particolare si possono ottenere pesi dipendenti dalla *precisione* di ciascun campione, ponendo questi pari o proporzionali all'inverso della *deviazione standard* della *media* "$\mathbf{m_c}$" di ciascun campione omogeneo, elevata ad un esponente maggiore o uguale ad **1**, ed in genere fissato pari a **2** :

$$p_{p_c} \propto \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{s_c^2 + 0{,}5 \cdot s_{n_c}^2}}{\sqrt{n_c}}\right)^k} \qquad \text{[eq.4]}$$

Dove :

$\mathbf{P_{pc}}$ è il peso di precisione della media $\mathbf{m_c}$

$\mathbf{s_c}$ è la deviazione standard del campione **c**

$\mathbf{s_{nc}}$ è l'incertezza di approssimazione (numerica) delle misure $\mathbf{x_i}$ del campione **c**

$\mathbf{n_c}$ è la cardinalità del campione **c**

$\boldsymbol{k} \geq 1$, solitamente **k = 2**

I pesi determinati in questo modo , dipendono dalla *precisione* e dall' *approssimazione numerica* dei campioni di misure : tanto più i valori del campione risultano dispersi, e quindi imprecisi, tanto minore sarà il peso delle misure di tale campione nella stima del parametro da assumere come riferimento . Essendo "$\mathbf{p_{pc}}$" dipendente anche dall'*incertezza di approssimazione* "$\mathbf{s_{nc}}$", questo risulta definito anche per campioni costituiti da una singola misura.

Usando lo stesso criterio è anche possibile ricavare dei pesi dipendenti dall'*accuratezza* del sistema di misura, se si considera la distanza del valore *medio* di ciascun campione "$\mathbf{r_{mc}}$", dalla *media* delle *medie* campionarie, in luogo delle *deviazioni standard* delle *medie* campionarie .

$$p_{a_c} \propto \frac{1}{(r_{m_c})^k} \qquad \text{[eq.5]}$$

Dove :

$\mathbf{P_{ac}}$ è il peso di accuratezza del campione **c**

se $\mathbf{e_{sc}} \neq \mathbf{0}$ **:** $\boldsymbol{r_{m_c}} = \sqrt{\left(\left(m_c - e_{s_c}\right) - \frac{\sum_1^{N_c}(m_c - e_{s_c})}{N_c}\right)^2 + 0{,}5\left(\frac{s_{n_c}}{\sqrt{n_c}}\right)^2}$

se **se** $\mathbf{s_{sc}} \neq \mathbf{0}$ **:** $\boldsymbol{r_{m_c}} = \sqrt{\left(m_c - \frac{\sum_1^{N_c} m_c}{N_c}\right)^2 + {s_{s_c}}^2 + 0{,}5\left(\frac{s_{n_c}}{\sqrt{n_c}}\right)^2}$

se $\mathbf{e_{sc}}$ e $\mathbf{s_{sc}}$ sono incogniti o $\mathbf{e_{sc}} = \mathbf{s_{sc}} = \mathbf{0}$ **:** $\boldsymbol{r_{m_c}} = \sqrt{\left(m_c - \frac{\sum_1^{N_c}(m_c - e_{s_c})}{N_c}\right)^2 + 0{,}5\left(\frac{s_{n_c}}{\sqrt{n_c}}\right)^2}$

$\boldsymbol{k} \geq 1$, solitamente **k =2**

I pesi di *precisione* ed i pesi di *accuratezza* si compongono, secondo le regole di composizione dei momenti geometrici del secondo ordine, per ottenere il peso complessivo per ciascun campione "c" : "p_c" .

$$p_c \propto \frac{1}{\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{s_c^2 + 0{,}5 \cdot s_{n_c}^2}}{\sqrt{n_c}}\right)^2 + (r_{m_c})^2}\right)^k} \qquad \text{[eq.6]}$$

Dove :

$\boldsymbol{k} \geq 1$, solitamente **k =2**

E' importante sottolineare che i pesi "$\mathbf{p_c}$" determinati nel modo descritto, risentono debolmente della *cardinalità* "$\mathbf{n_c}$" di ciascun campione (solo i pesi di precisione ne sono infatti dipendenti). Ciò dipende dalla fatto che, diversamente dalla *precisione*, l'*accuratezza* della media di un campione di misure è poco influenzata dal numero di misurazioni effettuate.

Il criterio *IDW* generando dei pesi in modo non arbitrario, risulta utile anche nei casi in cui non si conoscono apriori gli *errori* o le *incertezze sistematiche* dei sistemi di misura impiegate e quindi non si conosce apriori l'affidabilità dei sistemi di misura in modo oggettivamente quantificabile.

2.2) Correlazione tra il campione delle misure di un parametro e la popolazione dei suoi possibili valori

Il valore *medio* "$\mathbf{m_{c*}}$" di un campione di *misure* di un dato parametro "**x**", ottenuto con i procedimenti sopra illustrati, rappresenta un'approssimazione, o stima, imparziale del suo valore reale "$\mathbf{x_r}$". Tanto maggiore sarà la *cardinalità* "**n***" del campione "**c***", tanto più vicina sarà "$\mathbf{m_{c*}}$" al reale valore "$\mathbf{x_r}$" . Si definisce *popolazione* dei valori di "**x**", "**P(x)**", l'insieme contenente gli esiti "$\mathbf{x_i}$" di tutte le possibili misurazioni effettuabili di "**x**", siano esse in numero finito od infinito (campione *degenere* con *cardinalità* massima : $\mathbf{lim_{n*\to n*max}}$ **c*= P(x)**). Il valore *medio* "$\mu_{P\text{-}r}$" di "**P(x)**", rappresenta la miglior stima possibile di "$\mathbf{x_r}$" ed a sua volta "$\mathbf{m_{c*}}$", rappresenta la miglior stima disponibile di "$\mu_{P\text{-}r}$". L'*incertezza* "$\mathbf{s_{mc*}}$" del valore *medio* campionario "$\mathbf{m_{c*}}$" rappresenta, invece, la miglior stima disponibile della distanza tra "$\mathbf{m_{c*}}$" e "$\mu_{P\text{-}r}$", ossia l' errore *medio*, più probabile o atteso, commesso nella stima di "$\mathbf{m_{c*}}$" . L'espressione *stima imparziale* si riferisce al fatto che, per campioni diversi con la stessa *cardinalità* "**n***", estratti da una stessa *popolazione* "**P(x)**", i diversi valori "$\mathbf{m_{c*}}$" ottenuti, si addensano simmetricamente o oscillano rispetto al valore reale " $\mu_{P\text{-}r}$" .

$$m_{c^*} \approx \bar{E}\,(x) = \mu_{P_r} \approx x_r \quad \text{[eq.7]}$$

$$s_{m_{c^*}} \approx \sqrt{\bar{E}\left[\left(m_{c^*} - \mu_{P_r}\right)^2\right]} \approx \bar{E}\left[\left|m_{c^*} - \mu_{P_r}\right|\right] \quad \text{[eq.8]}$$

Come è intuibile , se , per ipotesi, si effettuasse sull'*unità geotecnica* di riferimento, una serie infinita di *misure* di un parametro "**x**", con un numero infinito di sistemi di misurazione diversi, l'*incertezza* "$\mathbf{s_{mc*}}$" tenderebbe a **0** e "$\mathbf{m_{c*}}$" tenderebbe a coincidere con "$\mu_{P\text{-}r}$"

$$\lim_{n\,,Nc\to\infty} m_{c^*} = \mu_{P_r} \quad \text{[eq.9]}$$

$$\lim_{n\,,Nc\to\infty} s_{c^*} = \sigma_{P_r} \quad \text{[eq.10]}$$

$$\lim_{n\,,Nc\to\infty} s_{m_{c^*}} = 0 \quad \text{[eq.11]}$$

Ovviamente, esiste un numero infinito di diverse *popolazioni* "**P(x)"** da cui possa essere tratto uno stesso, specifico, campione finito di valori $\mathbf{c^* := \{ x_1 , \dots , x_i , \dots , x_n \}}$ di *cardinalità* "**n***", e ciascuna di queste *popolazioni* di valori avrà , in generale , un diverso valore *medio* "μ_P".

Secondo questo principio, "$\mathbf{m_{c^*}}$" può essere inteso come la migliore stima disponibile del valore atteso "$\mathbf{E(\mu_P)}$" per la *media* "μ_P" della *popolazione* di campionamento "**P(x)**", "$\mathbf{P(\mu_P)}$" costituisce la *popolazione* dei valori *medi* delle *possibili* popolazioni di *campionamento* da cui può essere estratto il campione "**c*** ".

Quindi, l'incertezza della *media campionaria* "$\mathbf{s_{mc}}$* " rappresenta la miglior stima disponibile del valore atteso per "$\sigma_{\mu p}$", ossia la *deviazione standard* della *popolazione* "$\mathbf{P(\mu_P)}$".

L'incertezza campionaria "$\mathbf{s_{c^*}}$" rappresenta, invece, la miglior stima disponibile del valore atteso della *popolazione* "$\mathbf{P(\sigma_P)}$", dei valori "σ_P" delle deviazioni standard delle possibili popolazioni di *campionamento* "**P(x)**" per "**c***".

Quindi si ha che :

$$m_{c^*} \approx \bar{E}\ (\mu_P) = \mu_{P_r} \text{ [eq.12]}$$

$$s_{c^*} \approx \bar{E}\ (\sigma_P) = \sigma_{P_r} \text{ [eq.13]}$$

$$s_{m_{c^*}} \approx \bar{E}\ \left(\sigma_{\mu_P}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma_{Pr}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^*}} \text{ [eq.14]}$$

Dove :

$$\boldsymbol{\sigma_{\mu_P}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_{Pr}}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^*}}$$

E' importante sottolineare che, per ragioni per le quali si rimanda all'approfondimento su testi di statistica, mentre "$\mathbf{m_{c^*}}$" è uno stimatore *imparziale* (in inglese , *unbiased*) per "$\mu_{P.r}$" , "$\mathbf{s_{mc^*}}$" e" $\mathbf{s_{c^*}}$" **<u>non sono stimatori *imparziali*</u>** per "$\sigma_{\mu P}$" e "σ_p", ossia "$\mathbf{s_{mc^*}}$" e "$\mathbf{s_{c^*}}$" tendono ad accumularsi *asimmetricamente* rispettivamente intorno a "$\sigma_{\mu p}$" e "$\sigma_{p\text{-}r}$". Infatti , in conseguenza del *teorema del limite centrale*, la distribuzione statistica delle possibili *medie* campionarie "$\mathbf{m_{c^*}}$" relative a campioni di uguale *cardinalità* "**n***" , estratti da una stessa *popolazione* "**P(x)**", tende, al crescere di "**n***", ad una distribuzione simmetrica di tipo *normale* di *Gauss*, con parametri "μ_p"e "$\sigma_{\mu p}$" ($\mathbf{N[\ \mu_p\ ,\ \sigma_{\mu p}\ ]}$) , indipendentemente dal tipo di distribuzione statistica dei valori della *popolazione* di campionamento "**P(x)**". La distribuzione statistica delle possibili *deviazioni standard* "$\mathbf{s_c}$" relative a campioni di uguale *cardinalità* "**n*** " estratti da una stessa *popolazione* "**P(x)**" segue la distribuzione : $\mathbf{(\ \chi_{n^*}^2 \cdot \sigma_p^2\ /\ n^*)^{0,5}}$, dove "$\chi_{n^*}^2$" indica la distribuzione "*chi quadro"* con "**n***" gradi di libertà , che ha forma asimmetrica .

La grandezza "$\mathbf{s_{mc^*}}$", ossia la *deviazione standard* per la *media* campionaria "$\mathbf{m_{c^*}}$" , essendo una misura dell'*incertezza* del valore "$\mathbf{m_{c^*}}$" come stima di "$\mu_{P\text{-}r}$", contiene informazioni sul grado di fiducia o *confidenza* che si può attribuire al valore stimato.

Il livello di *confidenza* rappresenta la probabilità (indicata come **1-α**) con cui valore "$\mu_{P\text{-}r}$" ricade in un intervallo che ha in "$\mathbf{m_{c^*}}$" il suo centro o un suo estremo (intervallo di *confidenza*), la probabilità "α" indica il livello di *significatività* ossia la probabilità che "$\mu_{P\text{-}r}$" ricada fuori dall'intervallo di *confidenza*.

L'ampiezza di tale intervallo dipende da "$\mathbf{s_{mc^*}}$". Come già espresso, per conseguenza del *teorema del limite centrale* , per campioni "**c***" con alti valori di cardinalità "**n***" (dove "*alti*" operativamente indica **n*** > 30), la distribuzione statistica delle *medie* dei possibili campioni estratti da "**P(x)**", può assumersi di forma *normale* con *media* pari ad "$\mathbf{m_{c^*}}$" e *deviazione standard* pari a "$\mathbf{s_{mc^*}}$" . In tale caso, gli intervalli di *confidenza* per "$\mathbf{m_{c^*}}$", si ricavano dalle tabelle delle aree sottese alla curva della funzione di densità probabilità *normale standard*,, ossia con *media* pari a **0** e *deviazione standard* pari ad **1**: (**N[0 ; 1]**).

Tuttavia, avendo, nella maggior parte dei casi pratici, cardinalità complessive " **n*** " ≤ 30,

BOZZA

non è possibile impiegare il criterio sopra descritto, in più occorrerà formulare delle ipotesi sulla distribuzione statistica di "**P(x)**" per potere fare inferenze sui *limiti di confidenza* per la stima di "μ_{P-r}".

In particolare, è chiaro che l'ipotesi di una distribuzione simmetrica per "**P(x)**", come la distribuzione *normale*, risulta, in realtà, irrealistica, dato che i parametri meccanici di un terreno ammettono solo valori positivi , che spesso seguono distribuzioni asimmetriche.

2.3) Ipotesi sulla distribuzione statistica della popolazione di campionamento dei valori

Come illustrato alla fine del paragrafo precedente, per poter ricavare i limiti di *confidenza* stabiliti per la *media* "μ_{P-r}" della *popolazione* "**P(x)**" o il valore "**x**" con *significatività* "α" fissata, occorre nella maggior parte dei casi pratici (dove $\mathbf{n^*} \leq 30$), fare un'ipotesi sulla distribuzione statistica con cui sono distribuiti i valori "**x**" all'interno della *popolazione* "**P(x)**".

Non sono noti studi specifici sui tipi di distribuzione effettivamente seguiti dai parametri meccanici dei terreni, per cui , quanto di seguito esposto, è frutto di argomentazioni di carattere razionale, più che di evidenze empiriche.

E' prassi comune, nei più svariati ambiti scientifici, quando non si hanno informazioni sul tipo di distribuzione statistica seguita da una *popolazione* di valori, assumere che tale distribuzione sia di tipo *normale* di *Gauss*. Questa scelta viene supportata dal fatto che un grande numero di fenomeni aleatori, nei campi più diversi, seguono questa distribuzione, contraddistinta dalla sua forma simmetrica intorno al *valore medio*, coincidente con la *moda* e la *mediana*. Nel caso specifico dei parametri meccanici di un terreno, si riscontrano però dei limiti di applicazione per la distribuzione *normale*, che possono manifestarsi soprattutto nella stima dei valori corrispondenti a percentili estremi. Infatti , mentre la distribuzione *normale* di *Gauss* è definita tra $-\infty$ e $+\infty$, i parametri meccanici dei terreni, possono assumere solo valori positivi, di fatto compresi entro certi limiti. Ad esempio l'angolo di resistenza a taglio di picco di un terreno è praticamente sempre situato all'interno dell'intervallo compreso tra **10°** e **50°** (*Geotechdata.info - 2013*). Tuttavia se i valori campionari risultano poco dispersi, l'ipotesi di distribuzione di tipo *normale* risulta comunque accettabile, poiché la probabilità associata ai valori situati oltre gli estremi possibili, risulterebbe praticamente nulla.

Un'ipotesi di distribuzione, in generale, più aderente alle condizioni reali, è sicuramente quella di tipo *log-normale*, secondo la quale, ad essere distribuiti secondo legge *normale*, sono i logaritmi dei valori assunti dal parametro "**x**". Tale distribuzione ha il pregio di essere definita tra **0** e $+\infty$, escludendo quindi la possibilità di ottenere valori privi di senso fisico, ma mantiene comunque il difetto di poter restituire valori al di fuori dei limiti possibili. Tale condizione può comunque ritenersi accettabile se non vi è grande dispersione tra i valori campionari. L'impiego dell'ipotesi di distribuzione di tipo *log-normale* può essere reso più efficace, se applicato alla distribuzione dei valori : $\mathbf{x'} = x - \mathbf{x_{min}}$. In questo modo si impone pari a **0** la probabilità di ottenere valori al disotto del limite inferiore possibile. Il permanere della probabilità non nulla di poter ottenere valori più alti del limite massimo possibile è una condizione, meno temibile rispetto alla condizione opposta, poiché ai fini delle verifiche di sicurezza in campo geotecnico, usualmente interessano solo i valori più bassi della distribuzione e non quelli più alti.

In conseguenza di quanto espresso ai paragrafi precedenti, le ipotesi di distribuzione più rigorose, nel caso dell'*angolo di resistenza a taglio*, sono quelle relative a funzioni definite entro un intervallo finito. La più semplice di tali distribuzioni sarebbe quella di tipo *triangolare* , definita da tre parametri : il *limite inferiore* "**inf**", il *limite superiore* "**sup**", e la *moda* (valore più probabile) "**mod**". Tuttavia nel caso della distribuzione triangolare, la *densità di probabilità* varia con legge lineare tra i punti "**inf**", "**mod**" e "**sup**", una condizione generalmente infrequente nei fenomeni stocastici naturali .

Un'alternativa alla distribuzione *triangolare* è la distribuzione *PERT* (*Program Evaluation and Review Technique – C.E. Clark* , 1962) , detta anche *beta-PERT*, dipendente anch'essa dai parametri "**inf**", "**sup**" e "**mod**". Questa , rispetto alla distribuzione *triangolare*, ha il vantaggio di avere una forma più sinuosa, simile a quella di una distribuzione *normale* o *log-normale*. Va da sé che, per le sue caratteristiche , la distribuzione "*PERT*" dovrebbe essere quella più indicata per lo studio statistico dell'*angolo di resistenza a taglio*.

Di seguito si riporta la funzione di *densità di probabilità* secondo la distribuzione "*PERT*", insieme alle equazioni che ne esprimono la *media* e la *deviazione standard :*

$$\phi(x) = \frac{(x-inf)^{\alpha-1}(sup-x)^{\beta-1}}{\mathbf{B}(\alpha,\beta)(sup-inf)^{\alpha+\beta-1}} \quad \text{[eq.15-a]}$$

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{\mathbf{B}(z;\alpha,\beta)}{\mathbf{B}(\alpha,\beta)} \quad \text{[eq.15-b]}$$

$$\mu = \frac{inf+4\cdot mod+sup}{6} \quad \text{[eq.16]}$$

$$\sigma = \frac{sup-inf}{6} \quad \text{[eq.17]}$$

Dove :

$\boldsymbol{\phi}$ **(x)** è la funzione di densità di probabilità del valore **x** secondo la distribuzione *PERT*

$\boldsymbol{\Phi}$ **(x)** è la funzione di probabilità di massa (distribuzione cumulativa) del valore **x** secondo la distribuzione *PERT*

inf è l'estremo inferiore della popolazione

sup è l'estremo superiore della popolazione

mod è il valore più probabile ossia la moda della popolazione

μ è il valore medio della popolazione

σ è la deviazione standard della popolazione

$\boldsymbol{\alpha} = 1 + 4\frac{(mod-inf)}{(sup-inf)}$

$\boldsymbol{\beta} = 1 + 4\frac{(sup-mod)}{(sup-inf)}$

$\mathbf{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ *(funzione "beta" per i valori α e β)*

se $\alpha,\beta \in \boldsymbol{N} > 0 : \mathbf{B}(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$

$\mathbf{B}(z;\ \alpha\ ,\ \beta) = \int_0^z t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ *(funzione "beta" incompleta per i valori z, α e β)*

$\boldsymbol{z} = \frac{(x-inf)}{(sup-inf)}$

Il calcolo della funzione "*beta*" per valori **α** e **β** non interi, è difficoltoso per cui si rende necessario l'impiego di applicazioni informatiche specifiche.

La distribuzione *PERT*, è stata sviluppata per applicazioni in cui sono noti solo tre parametri : **"inf", "sup", "mod"**, per adattarla ai casi in cui i parametri noti siano diversi o più numerosi occorre fare alcune

considerazioni .

Qualora dal campione non fosse possibile ricavare un valore modale, sia per mancanza di valori duplicati sia per presenza di più mode (circostanze entrambe frequenti quando si hanno campioni con pochi elementi), utilizzare l'eq, **16** per stimare la *moda* della *popolazione*, ponendo "**μ**" pari ad "$\mathbf{m_c}$".

Sembrerebbe spontaneo assumere i parametri della distribuzione: **"inf", "sup", "mod"**, pari agli analoghi parametri campionari : "$\mathbf{inf_c}$", "$\mathbf{sup_c}$", "$\mathbf{mod_c}$", tuttavia tale scelta limita lo spazio dei valori possibili per la *popolazione*, a quello del campione di partenza, quando, in realtà quest'ultimo dovrebbe essere un intervallo compreso tra i valori minimo ed il valore massimo possibile o teorico per il parametro, in generalmente più ampio di quello campionario : $\mathbf{inf_t \leq x_{min} \leq x_{i\text{-}min}}$", "$\mathbf{sup_t \geq x_{max} \geq x_{i\text{-}max}}$.

Inoltre, quando si hanno più campioni di valori, ottenuti attraverso l'impiego di sistemi di misura diversi e, come descritto al par. **2.1**, da questi si sono ricavati i parametri statistici per il campione complessivo "**c***" : $\mathbf{m_{c*}}$, $\mathbf{s_{c*}}$, **n*** , i valori campionari originari di cui si dispone non sono direttamente coerenti con tali parametri. Per ovviare a questo problema, si suggerisce di porre i limiti inferire e superiore, pari rispettivamente alla *media* campionaria "$\mathbf{m_c}$" più o meno tre volte la *deviazione standard* campionaria "$\mathbf{s_c}$" a meno che tali limiti non superino quelli possibili o teorici : $\mathbf{inf_{c*} = max\{ m_c - 3s_c , inf_t \}}$, $\mathbf{sup_{c*} = min\{ m_c + 3s_c , sup_t\}}$. Ovviamente , se la *media* "$\mathbf{m_c}$" risulterà centrale rispetto all'intervallo " $\mathbf{[inf_{c*} , sup_{c*}]}$ " , essa coinciderà con la moda "$\mathbf{mod_c}$".

In conclusione di questa breve trattazione delle distribuzioni più adatte per lo studio statistico dei parametri geotecnici, è opportuno accennare anche al metodo della "*stima per tre punti*". Questo metodo risulta utile, qualora, in aggiunta a campioni di misure effettuate in sito od in laboratorio per uno specificato parametro, si voglia utilizzare, nella stima del valore caratteristico, anche informazioni tratte dalla letteratura scientifica o dall'esperienza professionale, come auspicato dall' *Eurocodice 7*. Tali informazioni sono generalmente espresse in termini di intervalli e/o valori più probabili o *medi*, ossia in termini dei già introdotti parametri "**inf**", "**sup**" e "**mod**" o "**m**". E' necessario quindi ricavare da tali parametri una *media* "**m**" ed una *deviazione standard* "**s**" campionari, in modo da poter assimilare questi dati ad un campione di misure di cardinalità "**n**" pari a **3** , o **2** se la moda o *media* non vengono fornite. Il metodo della *stima per tre punti*, si fonda sull'ipotesi che i valori all'interno dell'intervallo seguano una distribuzione di tipo *PERT* con *media* e *deviazione standard* definite dalle seguenti equazioni :

$$m_c = \frac{inf_c + 4 \cdot mod_c + sup_c}{6} \quad \text{[eq.18]}$$

$$s_c = \frac{sup_c - inf_c}{6} \quad \text{[eq.19]}$$

Dove :

$\boldsymbol{inf_c}$ è l'estremo inferiore del campione

$\boldsymbol{sup_c}$ è l'estremo superiore del campione

$\boldsymbol{mod_c}$ è la moda del campione

$\mathbf{m_c}$ è il valore medio del campione

$\mathbf{s_c}$ è la deviazione standard del campione

Qualora non fosse noto il valore modale, si suggerisce di porlo pari al valore centrale dell'intervallo ed assumere questo coincidente con il valore medio .

3) RASSEGNA DI ALCUNI SEMPLICI METODI DI STATISTICA INFERENZIALE, UTILIZZABILI PER LA STIMA DEI LIMITI DI CONFIDENZA PER I PARAMETRI GEOTECNICI

Di seguito si riportano alcune delle procedure di statistica inferenziale più usate per la stimadei valori caratteristici dei parametri geotecnici, intesi sia come valori *medi* che come valori, entrambi corrispondenti ad una probabilità di superamento fissata. In tutti i casi si ipotizza **n*** ≤ **30** .

3.1) Stima del valore caratteristico come valore medio con probabilità di superamento 1-α , nell'ipotesi di distribuzione *normale*

Questa equazione trova impiego quando la verifica in oggetto riguarda volumi relativamente grandi di terreno, il cui comportamento viene modellato attraverso l'assunzione di valori *medi* per i parametri meccanici.

$$x_k = \mu_{1-\alpha} \approx m_{c*} + t_{(\alpha\,;n^*-1)}\left(\frac{s_{c*}}{\sqrt{n^*}}\right) \qquad \text{[eq.20-a]}$$

Dove:

$\mathbf{x_k}$ è il valore caratteristico desiderato, inteso come stima della media della popolazione di campionamento $\mu_{1-\alpha}$ con probabilità di superamento **1-α**

$\mathbf{m_{c*}}$ è il al valore medio del campione

t è il valore della funzione inversa della distribuzione cumulata di *Student* per **n*-1** *gradi di libertà*, corrispondente alla probabilità di non superamento **α**

$\mathbf{s_{c*}}$ è la deviazione standard del campione

n*-1 è il numero di gradi di libertà, dove n* è cardinalità del campione

N.B. - Se il campione di partenza è costituito da **n*** ≤ **30** elementi, quest'equazione andrebbe impiegata solo se la *popolazione* segue la distribuzione *normale* di Gauss, se **n*** > **30**, caso raro in geotecnica, essa può essere applicata a qualsiasi tipo di distribuzione dato che in questo caso la distribuzione "**t**" di *Student* tende alla distribuzione *normale* di *Gauss* .

3.2) Stima del valore caratteristico come valore della popolazione con parametri statistici coincidenti con quelli campionari, con probabilità di superamento 1-α, nell'ipotesi di distribuzione *normale* e *log-normale*

nell'ipotesi di piccoli volumi significativi di terreno, il valore caratteristico andrebbe scelto, secondo l'*Eurocodice 7*, nell' **α**° percentile inferiore (probabilità di non superamento **α**, probabilità di superamento **1-α**)). Assumendo che i valori della *popolazione* di campionamento seguano la distribuzione *normale* con

parametri coincidenti con quelli campionari : p(**x)=N[μ≡m$_c$; σ≡s$_c$]** , ipotesi non scontata come si vedrà al capitolo **5**, si applica la seguente equazione :

$$x_k = x_{1-\alpha} \approx m_{c*} + Z_{(\alpha)} s_{c*} \quad \text{[eq.21-a]}$$

Dove:

x$_k$ è il valore caratteristico da assumere, inteso come stima del valore della popolazione di campionamento con parametri **μ ≡ m$_{c*}$** e **σ ≡ s$_{c*}$** con probabilità di superamento **1-α**

m$_{c*}$ è il al valore medio del campione che si ipotizza coincidente con la media della popolazione di campionamento **μ$_{P-r}$**

Z è il valore della funzione inversa della distribuzione cumulata *normale standard* **N[0;1],** corrispondente probabilità di non superamento (percentile inferiore) **α.**

s$_{c*}$ è la deviazione standard del campione che si ipotizza coincidente con la deviazione standard della media della popolazione di campionamento **σ$_{P-r}$**

Analogamente nell'ipotesi di distribuzione di tipo *log-nomale* si ha :

$$x_k = x_{1-\alpha} \approx e^{m_{ln-c*} + Z_{(\alpha)} s_{ln-c*}} \quad \text{[eq.21-b]}$$

Dove :

m$_{ln-c*}$ è il al valore medio del campione dei logaritmi naturali dei valori nel campione c* che si ipotizza coincidente con la media della popolazione di campionamento dei logaritmi dei valori **μ$_{ln-x}$.** Si ha che :

$$\boldsymbol{\mu_{ln-c*} = ln\left(\frac{m_{c*}^2}{\sqrt{m_{c*}^2 + s_{c*}^2}}\right)}$$

s$_{ln-c*}$ è la deviazione standard del campione dei logaritmi naturali dei valori nel campione c* che si ipotizza coincidente con la deviazione standard della media della popolazione di campionamento dei logaritmi dei valori **σ$_{ln-x}$.** Si ha che :

$$\boldsymbol{\sigma_{ln-c*} = ln\left(1 + \frac{s_{c*}^2}{m_{c*}^2}\right)}$$

3.3) Stima del valore caratteristico inteso come valore medio della popolazione di campionamento, con probabilità di superamento 1-α, nell'ipotesi di distribuzione dei parametri di tipo *log-normale*

Come per l' eq.**20**, anche queste equazioni trovano impiego quando le verifiche geotecniche riguardano volumi relativamente grandi di terreno, il cui comportamento dipende dai valori *medi* dei parametri meccanici. Queste equazioni, l'una alternativa all'altra, vanno applicate nel caso in cui la *popolazione* dei valori del parametro d'interesse segua una distribuzione di tipo *log-normale*, cioè quando la

BOZZA

distribuzione dei logaritmi naturali dei valori segua la distribuzione *normale* di *Gauss*.

Il fatto che i valori dei parametri geotecnici non possano assumere valori negativi, suggerisce che l'ipotesi di distribuzione *log-normale* della *popolazione* dei valori caratteristici sia in effetti da preferire rispetto all'ipotesi di distribuzione normale almeno per i parametri di resistenza **c'**, $\mathbf{c_u}$ e **ϕ'.**

Metodo "*Naive*" ovvero "*ingenuo*" (*riportato U. Olsson - 2005*)

$$x_k = \mu_{1-\alpha} \approx e^{m_{ln-c*}+t_{(\alpha\,;n^*-1)}\left(\frac{s_{ln-c*}}{\sqrt{n^*}}\right)} \quad \text{[eq.22]}$$

Metodo di *Cox (riportato da U.Olsson – 2005, a sua volta tratto da Land – 1971)*

$$x_k = \mu_{1-\alpha} \approx e^{m_{ln-c*}+\frac{s^2_{ln-c*}}{2}+Z_{(\alpha)}\sqrt{\frac{s^2_{ln-c*}}{n}+\frac{s^4_{ln-c*}}{2(n^*-1)}}} \quad \text{[eq.23]}$$

Metodo di *Cox modificato (Zhou e Gao – 1997)*

$$x_k = \mu_{1-\alpha} \approx e^{m_{ln-c}+\frac{s^2_{ln-c*}}{2}+t_{(\alpha;n^*-1)}\sqrt{\frac{s^2_{ln-c*}}{n}+\frac{s^4_{ln-c*}}{2(n^*-1)}}} \quad \text{[eq.24]}$$

Metodo di *Angus* (*riportato da L.Nori - 2009*)

$$x_k = \mu_{1-\alpha} \approx e^{m_{ln-c}+\frac{s^2_{ln-c*}}{2}+\frac{t_{(\alpha;n^*-1)}}{\sqrt{n*}}\sqrt{s^2_{ln-c*}\cdot\left(1+\frac{s^2_{ln-c*}}{2}\right)}} \quad \text{[eq. 25]}$$

Dove:

$\mathbf{x_k}$ è il valore caratteristico da assumere , inteso come stima della media della popolazione di campionamento $\mu_{1-\alpha}$ con probabilità di superamento **1-α**

$\mathbf{m_{ln-c*}}$ è il valore medio dei logaritmi del campione **c***

$\mathbf{Z_{(\alpha)}}$ è il valore della funzione inversa della distribuzione cumulata *normale standard*, corrispondente alla probabilità di non superamento **α**

$\mathbf{t_{(\alpha\,,\,n*-1)}}$ è il valore della funzione inversa della distribuzione cumulata di *Student* , corrispondente ad una probabilità di non superamento **α ,** per **ν = n*- 1** gradi di libertà

$\mathbf{s_{ln-c*}}$ è la deviazione standard dei logaritmi del campione

n* il numero di gradi di libertà (cardinalità equivalente del campione).

N.B. Si tratta di formulazioni approssimate, a causa della difficoltà che si incontra nell' estendere gli intervalli di *confidenza* per la *media* della distribuzione dei logaritmi dei valori, a quella dei valori di partenza (dato che la *media* della *popolazione* dei logaritmi dei valori non coincide con il logaritmo della *media* dei valori), senza ricorrere a metodi numerici. Nel caso di bassi valori di **n***, è preferibile utilizzare il metodo di *Cox* modificato (*U.Olsson - 2005*).

4) ALCUNI METODI AVANZATI DI STATISTICA INFERENZIALE

Le procedure, di seguito sommariamente descritte , sono metodi numerici per applicazioni al calcolatore e necessitano la creazione programmi dedicati. Anche nei casi a seguire si ipotizza **n* ≤ 30.**

4.1) Il metodo "*Generalized Confidence Intervals*" *(Weerhandi 1993 ; Krishnamoorthy , Mathew 2003 ; Krishnamoorthy, Mathew, Ramachandran 2004)*

Si tratta di un metodo che consente di stimare i parametri statistici, così come qualsiasi valore corrispondente ad un dato percentile, di una *popolazione*, la cui distribuzione è approssimabile o riconducibile alla distribuzione *normale*, come ad esempio la distribuzione *log-normale*, partendo dai parametri statistici di un campione, attraverso simulazioni numeriche,di tipo *Montecarlo*.

In particolare, considerando una successione di valori "$\mathbf{x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]})}$", costituiti dai valori della funzione inversa di una qualsiasi distribuzione statistica, in forma cumulata (probabilità di massa) "**D(x)**", ottenuti per valori reali casuali "$\mathbf{n_{random[0,1]}}$" compresi tra **0** ed **1** : $\mathbf{x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]})= inv.D(n_{j\text{-}RDN[0,1]})}$, si ha che , per un numero "**j"** che tende all'infinito di valori così ottenuti, il **k°** *percentile inferiore* della successione "$\mathbf{x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]})}$": $\mathbf{PC_{k°\text{-}inf}(x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]}))}$**,** tende ad assumere il valore : $\mathbf{D(x_j) = D(inv.D(n_{j\text{-}RDN[0,1]})) = n_{j\text{-}RND[0,1]} = k}$**,** che è il valore della probabilità cumulata "**Φ(x)**" corrispondente ad una probabilità di non superamento pari a "k" : $\mathbf{PC_{k°\text{-}inf}(x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]})) = \mathit{inv}.D(\Phi(x)=k)}$ (eq.26).

In questo modo è possibile generare numericamente una qualsiasi distribuzione statistica cumulata (distribuzione di percentili) che può, a sua volta. essere funzione di più distribuzioni diverse (eq.27) . Applicando tale principio alle distribuzioni cumulate inverse di tipo *normale standard* "**N[0;1]"** e *chi quadro* "χ^2_{n*-1}" per **n*-1** gradi di libertà, si può generare numericamente una serie che approssimi la distribuzione inversa della funzione cumulata della "**t**" di *Student* (eq. 28) per gli stessi **ν = n*- 1** gradi di libertà. Quindi, per le distribuzioni che siano approssimabili o riconducibili ad una distribuzione di tipo *normale*, si possono generare successioni di valori per i parametri "$\mu_{P\text{-}j}$" "$\sigma_{\mu P\text{-}j}$" e "$\sigma_{p\text{-}j}$", così come per qualsiasi altro valore corrispondente ad un assegnato percentile "$\mathbf{x_{(1-\alpha)\text{-}j}}$", compatibili con il campione di

partenza. In particolare, nell'ipotesi di distribuzione *log-normale*, ciò avviene attraverso inferenze sulla distribuzione (di tipo *normale*) dei logaritmi dei valori campionari. In questo caso specifico il metodo risolve il problema dell'estensione degli intervalli di *confidenza* tra la distribuzione *normale* dei logaritmi dei valori e quella *log-normale* dei valori della *popolazione*.

Tale metodo, pur risultando oneroso dal punto di vista computazionale, e necessitando di un applicazione informatica dedicata, si è dimostrato, secondo vari studi (*Krishnamoorthy , Mathew 2003; Olsson 2005 ; Fletcher 2005*) in assoluto il più accurato tra i vari proposti, soprattutto per campioni di partenza con pochi elementi.

$$lim_{j\to\infty}\, PC_{\mathbf{k}^\circ-inf}\left(x_j = inv.D\left(n_{j-RND[0,1]}\right)\right) = x(\boldsymbol{k}) = \; inv.\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}) \quad \text{[eq.26]}$$

Dove :

inv.D(k) è il valore assunto dalla funzione inversa della distribuzione di probabilità cumulata (di massa) **D** in corrispondenza del valore di probabilità **Φ(x)=k** .

$$\mathbf{x}_j\left(\mathbf{n}_{j-RND[0,1]}\right) = inv.\mathbf{D}\left(\,\mathbf{P} = \mathbf{n}_{j-RND(0,1)}\,\right)$$

$$\mathbf{n}_{j-RND[0,1\,]} \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{PC_{k^\circ\text{-}inf}\,(x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]}))}$ è il k-simo percentile inferiore della successione di valori $\mathbf{x_j(n_{j\text{-}RND[0,1]})}$

$$lim_{j\to\infty}\, PC_{\mathbf{k}^\circ-inf}\left(x_j = f\left(inv.D_1\left(n_{J_1-RND[0,1]}\right), \ldots, inv.D_n\left(n_{J_n-RND[0,1]}\right)\right)\right) = inv.\mathbf{D}(\mathbf{k}) \quad \text{[eq.27]}$$

Dove :

inv.D(k) è il valore assunto dalla funzione inversa della distribuzione di probabilità cumulata **D,** in corrispondenza del valore di probabilità **Φ(x)=k** .

$$\mathbf{x}_j\left(\boldsymbol{n}_{j_1-RND[0,1]}, .., \boldsymbol{n}_{j_n-RND[0,1]}\right) = f\left(inv.\boldsymbol{D}_1\left(\boldsymbol{n}_{j_1-RND[0,1]}\right), \ldots, inv.\boldsymbol{D}_n\left(\boldsymbol{n}_{j_n-RND[0,1]}\right)\right) = inv.\mathbf{D}(\boldsymbol{\Phi}_j)$$

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_{j_1-RND[0,1]} \in \mathbf{R}, \ldots, \boldsymbol{n}_n = \boldsymbol{n}_{j_n-RND[0,1]} \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{PC_{k^\circ\text{-}inf}\,(\,x_j = \boldsymbol{f}\,(invD_1(n_{j1\text{-}RND[0,1]})\,, \ldots, invD_n(n_{jn\text{-}RND[0,1]}))}$ è il **k°** percentile inferiore della successione di valori $\mathbf{x_j}$

$$t_{(n*-1)_j} \approx \frac{Z_{\left(\Phi=n_{1_j-RND[0,1]}\right)_j}}{\sqrt{\chi^2_{\left(\Phi=n_{2_j-RND[0,1]};\ \nu=n*-1\right)_j}}} \quad \text{[eq.28]}$$

Dove:

$\mathbf{t_{(n*-1)-j}}$ indica un valore generico della successione dei valori della distribuzione cumulata inversa ***t*** di *Student* con **ν = n*-1** gradi di libertà , non ordinati

$Z_{\left(\Phi=n_{1_j-RND[0,1]}\right)_j}$ indica il valore della funzione inversa della distribuzione *normale standard* cumulata, per un valore di probabilità di non superamento **Φ** casuale (valore reale casuale compreso nell'intervallo tra **0** ed **1** : $n_{j_1-RND[0,1]}$)

$\chi^2_{\left(\Phi=n_{2_j-RND[0,1]};\ \nu=n*-1\right)_j}$ indica il valore della funzione inversa della distribuzione *chi quadro*,χ^2, con **ν=n*-1** gradi di libertà, per un valore di probabilità di non superamento **Φ** casuale (valore reale casuale compreso nell'intervallo tra **0** ed **1** : $n_{j_2-RND[0,1]}$)

Come affermato all'inizio del paragrafo, il metodo "*Generalized Confidence Intervals*" può essere applicato a qualsiasi tipo di distribuzione riconducibile alla distribuzione *normale* di *Gauss*, tra queste anche alla distribuzione *PERT* essendo quest'ultima approssimabile ad una distribuzione *normale*.

4.2) Metodi di statistica inferenziale applicabili alla distribuzione *PERT*

Se la distribuzione *PERT* risulta simmetrica o se $\mathbf{m_c}$ e $\mathbf{mod_c}$ sono pressoché coincidenti e se l'intervallo tra i limiti inferiore e superiore campionari "**[$\mathbf{inf_{c*}}$; $\mathbf{sup_{c*}}$]**" si mantiene ben all'interno dell'intervallo dei limiti teorici "**[$\mathbf{inf_t}$; $\mathbf{sup_t}$]**" : $\mathbf{inf_{c*}} >> \mathbf{inf_t}$ e $\mathbf{sup_{c*}} << \mathbf{sup_p}$; <u>la distribuzione *PERT* può essere assimilata ad una distribuzione *normale* di *Gauss*</u> . Quindi, la *media* della *popolazione* di campionamento "μ_p" con probabilità di superamento **1-α**, può ricavarsi mediante l'applicazione dell' **eq.20** (metodo della distribuzione *t* di *Student*) o del metodo *Generalized Confidence Interval* applicato alla distribuzione *normale* .

In generale la distribuzione *PERT* non è simmetrica, ed i limiti inferiore e superiore campionari "$\mathbf{inf_{c*}}$" e "$\mathbf{sup_{c*}}$**"** possono avvicinarsi a quelli teorici "$\mathbf{inf_t}$" e "$\mathbf{sup_t}$**",** per cui i metodi sopracitati andrebbero applicati per la stima della *mediana* della distribuzione di campionamento "$\mathbf{med_p}$" con probabilità di superamento **1-α**, invece che per la *media* " μ_p" con la stessa probabilità di superamento (*M.J.Panik - 2012*). Tuttavia essendo la *mediana* il valore corrispondente ad una probabilità di superamento pari al **50%** (e quindi con pari probabilità di non superamento), non assume un significato fisico utile ai fini della determinazione dei valori caratteristici dei parametri geotecnici per le verifiche di sicurezza. Per cui è necessario utilizzare una relazione che leghi la *mediana* alla *moda* ed alla *media* della *popolazione* di campionamento. A questo scopo si può utilizzare la formula empirica di *Pearson* secondo la quale :

$$\boldsymbol{\mu_p} \approx \frac{\mathbf{3 \cdot} \boldsymbol{med_p} - \boldsymbol{mod_p}}{\mathbf{2}} \quad \text{[eq.29]}$$

Al fine di poter determinare "μ_p", resta però da trovare una relazione che leghi la *moda* della *popolazione* di campionamento "$\mathbf{mod_p}$", che è incognita, alla *media* "μ_p" . Tuttavia, l' **eq.16** in cui la *media* "μ_p" è funzione della moda "$\mathbf{mod_p}$" e dei *limiti inferiore* "$\mathbf{inf_p}$" e *superiore* "$\mathbf{sup_p}$" della distribuzione *PERT* , non ci è di per se utile, poiché presuppone la conoscenza dei *limiti inferiore* "$\mathbf{inf_p}$" e *superiore* "$\mathbf{sup_p}$" , della *popolazione* di campionamento, che sono, nei problemi di caratterizzazione dei parametri geotecnici anch'essi, incogniti. Si può comunque superare anche questo problema considerando i valori campionari "$\mathbf{inf_{c*}}$" e "$\mathbf{sup_{c*}}$" , già introdotti al paragrafo **2.2** , come i valori attesi per i limiti "$\mathbf{inf_p}$" e "$\mathbf{sup_p}$" delle possibili popolazioni di campionamento, quindi può porsi : $\mathbf{inf_{c*} = inf_p}$ e $\mathbf{sup_{c*} = sup_p}$. Dunque si ha :

$$\boldsymbol{mod_p = \frac{6\mu_p - (inf_{c*} + sup_{c*})}{4}} \quad \text{[eq.30]}$$

Dove :

$$\mathbf{inf_{c*} = max[\, m_c - 3s_c \,;\, inf_t \,]}$$

$$\mathbf{sup_{c*} = min[\, m_c + 3s_c \,;\, sup_t \,]}$$

Componendo l'**eq.29** e l'**eq.30** si ottiene :

$$\boldsymbol{\mu_p \approx \frac{6}{7} med_p + \frac{1}{14}(inf_{c*} + sup_{c*})} \quad \text{[eq.31]}$$

Mediante l'**eq.31** è così possibile convertire la *mediana* della *popolazione* di campionamento "$\mathbf{med_p}$", con probabilità di superamento **1-α,** nella *media* della *popolazione* "μ_p" con la stessa probabilità di superamento.

E' importante notare che, anche in presenza di una distribuzione campionaria simmetrica, con : $\mathbf{m_c \equiv med_c \equiv mod_c}$ gli stessi metodi di statistica inferenziale restituiscono valori diversi per "$\mu_{p-(1-\alpha)}$" se applicati direttamente alla *media* (assimilazione alla distribuzione *normale*) o se applicati alla *mediana* ricavando da questa la *media*. Ciò avviene poiché nella distribuzione *PERT* si assume che l'intervallo di campionamento, approssimato a quello campionario : $\mathbf{[\, inf_p \,;\, sup_p \,] \approx [\, inf_{c*} \,;\, sup_{c*} \,]}$, sia lo stesso per tutte le popolazioni di campionamento e che non vari al variare della *media*. Le distribuzioni *PERT* delle popolazioni di campionamento sono in generale asimmetriche, anche quando la distribuzione campionaria è simmetrica.

Il valore della *popolazione* di campionamento corrispondente ad una probabilità di superamento "**1-α**" fissata, può ricavarsi per interpolazione di una successione di valori ottenuti con l'eq.**15-b** , se si assumono i parametri della *popolazione* coincidenti con quelli campionari. Alternativamente con il metodo *Generalized Confidence Intervals*, si possono generare le successioni di parametri "μ_{P-j}" e "σ_{P-j}" di possibili popolazioni di campionamento, e per ognuna delle combinazioni di parametri ottenute, tramite la funzione inversa dell' eq. **15-b**, si potrebbe ottenere un valore "$\mathbf{x_j}$" casuale oppure corrispondente ad un percentile specifico, e dalla successione di valori "$\mathbf{x_j}$", si potrà poi selezionare il valore corrispondente ad una probabilità di superamento "**1-α**" fissata .

4.3) Il metodo "*Bootstrap*" (*B.Efron 1977*)

Questo metodo numerico, sviluppato *B. Efron* nel 1977 , non fa ricorso ad ipotesi sulla distribuzione della *popolazione* dei valori "**P(x)**". A partire dalla serie dei valori campionari , vengono generati,

mediante metodo *Montecarlo*, dei campioni artificiali con la stessa cardinalità "**n**" del campione originale, in cui ciascun elemento "$\mathbf{x_i}$", può assumere solo i valori presenti nel campione originario stesso. Per ciascuno di tali campioni artificiali è ovviamente possibile ricavare i parametri statistici ($\mathbf{m_c}$ **,** $\mathbf{s_c}$), così come il percentile superiore e/o inferiore corrispondente a ciascun valore del campione.

Quindi dalla successione di campioni artificiali generati, si può ricavare la corrispondente distribuzione dei parametri campionari ($\mathbf{m_c}$ **,** $\mathbf{s_c}$), ed a ciascun parametro potrà essere attribuita una probabilità di superamento "1-α". I valori così ricavati si assumeranno come riferiti alla *popolazione* di campionamento : $\mathbf{m_c \equiv \mu_{P(1-\alpha)}}$ **,** $\mathbf{s_c \equiv \sigma_{P(1-\alpha)}}$.

Un problema nell'applicazione del metodo *Bootstrap* è rappresento dalla necessità di avere un campione di valori omogenei, e non , come per gli altri metodi presentati, solo i parametri statistici campionari ($\mathbf{m_c}$ **,** $\mathbf{s_c}$ **,** $\mathbf{n_c}$). Quindi, di per sé, non sarebbe possibile applicare direttamente il metodo *Bootstrap* quando si hanno più campioni di valori ottenuti con metodi diversi. In questo caso, si suggerisce di adottare come campione di partenza, il campione ottenuto unendo i singoli campioni, ove ciascun valore "$\mathbf{x_{c-i}}$" è stato preventivamente moltiplicato per il peso stabilito per il campione di provenienza, fratto la somma dei pesi di tutti i campioni ($\mathbf{p_c / \Sigma_1^{Nc} p_c}$). Se ciò non dovesse essere possibile, poiché si conoscono solo i parametri statistici e la cardinalità del campione o dei campioni di partenza, ma non i campioni stessi, si può generare con metodo *Montecarlo* un campione con gli stessi parametri del campione complessivo, ottenuto con il metodo descritto al capitolo 2, e su questo applicare il metodo *Bootstrap*.

Il metodo *Bootstrap* non consente di calcolare il valore corrispondente ad una probabilità di superamento fissata.

5) OSSERVAZIONI SULLA SCELTA DEL TIPO DI PARAMETRO STATISTICO DA ASSUMERE COME VALORE CARATTERISTICO DI UN PARAMETRO GEOTECNICO

Sebbene, come già visto al capitolo **1**, la normativa italiana non fissi esplicitamente, in caso di applicazione di metodologie statistiche per la caratterizzazione dei parametri geometrici, valori di riferimento per le probabilità limite di *non superamento* (o in maniera equivalente di *superamento*), le stesse norme fissano tale limite al 5% per le resistenze dei materiali strutturali ed al 95% per le azioni. In più l'*Eurocodice 7* suggerisce l'impiego degli stessi limiti, per il calcolo dei valori caratteristici dei parametri geotecnici, qualora si impieghino metodi statistici. Da questi due riferimenti normativi, si evince che la probabilità di superamento di riferimento per la caratterizzazione dei parametri geotecnici va assunta, nel caso in cui i parametri che operino a favore di sicurezza, pari o superiore al **95%** : $\boldsymbol{\alpha}$**-1 = 95%** ($\boldsymbol{\alpha}$ **= 5%**) . Nel caso di parametri che operino sfavore di sicurezza la probabilità di superamento sarà del 5% : $\boldsymbol{\alpha}$**-1 = 5%** ($\boldsymbol{\alpha}$ **= 95%**) .

I metodi di statistica inferenziale presentati, consentono il calcolo della *media* di una *popolazione* di campionamento ed il calcolo del valore della *popolazione* di campionamento, entrambi con una probabilità di superamento fissata, nell'ipotesi di distribuzione *normale*, *log-normale* e *PERT*.

La scelta dell'uno o dell'altro parametro statistico da assumere come parametro geotecnico caratteristico, dipende, come stabilito dalla normativa europea ed italiana, dalle dimensioni del volume di terreno significativamente influenzato dall'opera, oltre che dalla capacità delle strutture di ripartire i carichi all'interno dello stesso volume di terreno. Nella maggior parte dei casi il volume di terreno fisicamente perturbato dalla costruzione di un opera (*popolazione* di campionamento dei campioni di terreno), è grande nell'ordine delle centinaia di miglia, se non addirittura milioni, di volte quello effettivamente studiato in laboratorio o in sito (campione statistico). In tale circostanza, è evidente che il comportamento del terreno andrà modellato attraverso parametri che ne descrivano il comportamento globale, per cui i parametri geotecnici caratteristici da assumere saranno i valori *medi* delle popolazioni di campionamento degli stessi parametri, corrispondenti ad adeguate probabilità di superamento : $\mathbf{x_k = \mu_{(1-\alpha)}}$.

Tuttavia, in alcuni casi la verifica di sicurezza di un opera può dipendere da fenomeni di rottura o di cedimento locale, che coinvolgono volumi di terreno relativamente piccoli, anche nell'ordine di un centinaio o una decina di volte il volume complessivamente testato in laboratorio (es. verifiche su tiranti o su plinti di

ridotte dimensioni). In questo caso , secondo quanto richiamato dalle stesse norme, dovendo modellare il comportamento locale, ogni parametro geotecnico caratteristico dovrebbe coincidere con una stima cautelativa del valore "**x**" (è necessariamente sottinteso "della *popolazione* di campionamento") corrispondente, almeno per l'*Eurocodice 7,* ad una probabilità di superamento "**1-α**" fissata minore o uguale al **95%** per i parametri che vanno a vantaggio della sicurezza e del **5%** se vanno a svantaggio della sicurezza : $\mathbf{x_k = x_{1-a}}$. E' ovvio che tali valori risulteranno più estremi rispetto ai valori *medi* della *popolazione* di campionamento con la stesse probabilità di superamento.

Il concetto di "*valore della popolazione di campionamento corrispondente ad una probabilità di superamento fissata*" resta tuttavia un po' vago e necessita di qualche approfondimento.

Infatti come precedentemente illustrato, uno stesso campione di misure riferite ad un parametro geotecnico, può essere estratto da diverse popolazioni di campionamento. Fissato un valore per la probabilità di superamento all'interno di una specifica *popolazione* di campionamento, che chiameremo probabilità di superamento *interna* "$\mathbf{p_{s-i}}$", esistono infinite popolazioni di campionamento possibili, e quindi infiniti valori con la stessa "$\mathbf{p_{s-i}}$", ciascuno con una probabilità di superamento diversa, che chiameremo probabilità esterna "$\mathbf{p_{s-e}}$" fissata. Quindi non sarebbe di per sé sufficiente individuare un valore specifico, ma ne occorrerebbero due, uno per individuare il tipo di valore all'interno di una *popolazione* generica "$\mathbf{p_{s-i}}$", e l'altro per individuare la *popolazione* di campionamento "$\mathbf{p_{s-e}}$". A meno che, implicitamente, per *popolazione* di campionamento si intenda quella con i parametri statistici coincidenti con quelli del campione di partenza.

Secondo un'altra possibile interpretazione, tale valore, può essere pensato come quello corrispondente ad una probabilità di superamento fissata "$\mathbf{p_s}$", all'interno di una successione di valori "$\mathbf{x_j}$", ognuno estratto casualmente da una diversa *popolazione* di campionamento. A parità di probabilità di superamento : $\mathbf{p_{s-i} = p_{s-e} = p_s}$ **;** i valori ricavati col primo metodo risultano più estremi di quelli ricavati con il secondo.

L'unico metodo che consente di stimare tale valore, secondo entrambe le possibili interpretazioni, è il *Generalized Confidence Intervals*. Per le distribuzioni di tipo *normale*, *log-normale* o *PERT* tramite le funzioni inverse delle distribuzioni di probabilità cumulata, è possibile stimare il valore "$\mathbf{x_{1-a}}$", secondo il primo metodo, assumendo i parametri statistici delle distribuzioni coincidenti con quelli campionari vedi paragrafi : **3.2** e **4.2**.

6) NOTE PER L'APPLICAZIONE DEI METODI STATISTICI AI PARAMETRI DI RESISTENZA A TAGLIO ϕ' e c'

6.1) Calcolo del valore caratteristico della tensione intercetta c'

I parametri di resistenza a taglio "**ϕ'** " e "**c'** " di un terreno, ricavati in laboratorio , vengono determinati attraverso la rappresentazione grafica , sul piano cartesiano " **σ'-τ'** " di diversi stati tensionali efficaci di rottura, relativi a provini ricavati da uno stesso campione. Nel caso di *prove triassiali* occorrono un minimo di due o tre provini (se si vuole verificare l'esistenza di relazioni **τ'= f(σ')** non lineari). In caso di prove a taglio diretto , è possibile determinare l'angolo di resistenza a taglio anche con una singola prova, considerando nulla la coesione intercetta **c'**. In generale , per entrambi i tipi di prova , si può ricavare una curva "**τ'(σ')**" (che prende il nome di *inviluppo di rottura* , in caso di prove triassiali), che descrive gli stati tensionali a rottura , in intervallo di tensioni normali di confinamento "$\mathbf{\sigma_3'}$ " o "$\mathbf{\sigma_v'}$ " esplorato dalle diverse prove.

Ai fini applicativi, queste curve vengono approssimate a rette, rappresentate da equazioni del tipo : **τ' = c' + σ'·tanϕ'** , che descrivono il comportamento a rottura del terreno <u>in uno specifico intervallo di tensioni "**Δσ'** " che riproduce le condizioni di progetto</u>. Essendovi, in generale, una dipendenza tra i parametri "**c'** " e "**σ'** ", che descrivono uno stato tensionale a rottura, nell' applicazione dei metodi statistici descritti, questi non andrebbero in generale trattati come parametri indipendenti.

Risulta auspicabile che a partire dagli stati tensionali a rottura, determinati in laboratorio, fosse il progettista stesso a ricavare le curve "**τ'(σ')**" e le rette: **τ' = c' + σ'·tanϕ'**; e quindi a determinare i parametri "$\mathbf{\phi'_i}$ " e "$\mathbf{c'_i}$ " di ciascun campione di terreno, invece del Tecnico di Laboratorio o del Geologo, come spesso

accade.

Si suggerisce, data la generale dipendenza dei parametri "**c'** " e "**σ'** ", prima di applicare anche al parametro "**c'** " i metodi statistici descritti ai capitoli precedenti descritti, di verificare l'eventuale correlazione matematica esistente tra le coppie di valori "ϕ'_i " e "c'_i ", ottenuti in laboratorio, ricavandone l'equazione di tendenza, ossia la funzione " **c'(ϕ')** " che meglio interpola le coppie di parametri per ciascun campione di misure "**c**".

Se non vi è correlazione matematica tra i valori "ϕ'_i " e "c'_i " , in nessuno dei campioni di misure, "**ϕ'** " e "**c'** " sono indipendenti, e "c'_k " potrà essere determinato applicando direttamente i metodi di statistica inferenziale descritti ai capitoli **3** e **4** .

In presenza di correlazione matematica tra i valori "ϕ'_i " e "c'_i " anche in solo un campione, i parametri "c'_i " di ciascun campione dovranno allora essere espressi come la somma di una parte deterministica " $c'_{d\text{-}i} = c'(\phi')$ " e di una parte casuale pari a "$c'_{s\text{-}i} = c'_i - c'_{d\text{-}i}(\phi'_i)$ ". I metodi statistici descritti nei capitoli precedenti vanno applicati direttamente solo ai parametri "ϕ'_i " e "$c'_{s\text{-}i}$", che possono essere considerati indipendenti.

La determinazione del parametro caratteristico " c'_k" attraverso un equazione del tipo **:** $c'_k = c'_s + c'_d(\phi')$; dipende da due variabili aleatorie indipendenti: " c'_s ", " **ϕ'** " a cui si aggiunge una terza variabile aleatoria condizionata " $c'_d(\phi')$ ", dato che la presenza di campioni di misure diversi, con diverse equazioni di tendenza " $c'_d=f(\phi')$" introduce un ulteriore elemento stocastico, dovuto alla presenza di più di un legame possibile di dipendenza tra "c'_d" e "**ϕ'** ". E' errato ricavare il valore caratteristico della tensione intercetta "c'_k", inteso come valore o valore *medio* con probabilità di non superamento "**α**", attraverso un'espressione del tipo: $c'_k = c'_\alpha = c'_{s\text{-}\alpha} + c'_{k\text{-}d}(\phi'_\alpha)$, dove " c'_k" risulta funzione dei valori di "c'_s" e "**ϕ'** ", con probabilità di non superamento fissata pari a "**α**". Infatti, in tale caso, la probabilità di non superamento da attribuire a "c'_k" non è in genere pari ad "**α**" ma bensì a : $\Phi = 2\cdot\alpha\cdot\beta$ (probabilità di superamento : $1 - 2\cdot\alpha\cdot\beta$) , dove "**β**", è la probabilità condizionata di non superamento del valore "$c'_{k\text{-}d} = f(\phi'_\alpha)$", verificatosi l'evento "$\phi' = \phi'_\alpha$ ".

Una soluzione a questo problema è data dalla generazione, con metodo *Montecarlo*, della successione dei valori "$\mu_{c'j}$" o "c'_j" attraverso le equazioni di seguito riportate.

Se "c'_k " è inteso come valore di "$\mu_{c'j}$" con probabilità di superamento **(1-α) :**

$$\mu_{c'-j} = invD_1\left(m_{c*c's} ; s_{mc*c's} ; n_{j_1-RND[0,1]} \right) + invD_2\left(m_{c'_d=f(\varphi_j'')} ; s_{mc'_d=f(\varphi_j')} ; n_{j_2-RND[0,1]} \right)$$

[eq.32-a]

$$\varphi_j' = invD_3\left(m_{c*\varphi'} ; s_{mc*\varphi'} ; n_{J_3-RND[0,1]} \right) \qquad \text{[eq.32-b]}$$

$$c'_k = \mu_{c'(1-\alpha)} = lim_{j\to\infty} PC_{\alpha°-inf}\left(\mu_{c'-j}\right) \qquad \text{[eq.33-b]}$$

Se "c'_k " è inteso come valore di "**c'** " con probabilità di superamento **(1-α)** :

$$c'_j = invD_1\left(m_{c*c's} ; s_{c*c's} ; n_{j_1-RND[0,1]} \right) + invD_2\left(m_{c'_d=f(\varphi_j')} ; s_{c'_d=f(\varphi_j')} ; n_{j_2-RND[0,1]} \right)$$

[eq.33-a]

$$\varphi_j' = invD_3\left(m_{c*\varphi'} ; s_{c*\varphi'} ; n_{j_3-RND[0,1]} \right) \quad \text{[eq.33-b]}$$

$$c'_k = c'_{j(1-\alpha)} = lim_{j\to\infty} PC_{\alpha°-inf}\left(c'_j\right) \quad \text{[eq.33-c]}$$

Dove :

$\mathbf{invD_1}\left(\mathbf{m_{c*c's}} ; \mathbf{s_{mc*c's}} ; \mathbf{n_{j1-RND[0,1]}} \right)$ e $\mathbf{invD_1}\left(\mathbf{m_{c*c's}} ; \mathbf{s_{c*c's}} ; \mathbf{n_{j1-RND[0,1]}} \right)$ sono le funzioni inverse per valori probabilità casuali , rispettivamente della distribuzione statistica cumulata delle medie delle possibili popolazioni di campionamento dei valori $\mathbf{c'_s}$ campionari, e della distribuzione statistica cumulata della popolazione di campionamento dei valori di $\mathbf{c'_s}$ campionari con parametri coincidenti con quelli del campione complessivo

$\mathbf{invD_2}\left(\mathbf{m_{c'd=f(\varphi_j')}} ; \mathbf{s_{mc'd=f(\varphi_j')}} ; \mathbf{n_{j2-RDN[0,1]}} \right)$ e $\mathbf{invD_2}\left(\mathbf{m_{c'd=f(\varphi_j')}} ; \mathbf{s_{c'd=f(\varphi_j')}} ; \mathbf{n_{j2-RDN[0,1]}} \right)$ sono le funzioni inverse, per valori di probabilità casuali, delle distribuzioni statistiche cumulate rispettivamente : delle medie e dei valori della popolazione di campionamento del campione dei valori assunti dalle equazioni di tendenza "$\mathbf{c'_{d-c} = f_c(\phi')}$ " per uno stesso valore $\boldsymbol{\phi_j'}$ fissato: $\mathbf{c'_{d-c} = f_c(\phi_j')}$, con parametri statistici: $\mathbf{m_{c'd}}$ **= media** $\mathbf{\{f_1(\phi_j'),\ldots,f_{Nc}(\phi_j')\}}$ **e** $\mathbf{s_{mc's}}$ **= dev.st** $\mathbf{\{f_1(\phi_j'),\ldots,f_{nc}(\phi_j'')\} \cdot n_c^{0,5}}$ o $\mathbf{s_{mc's}}$ **= dev.st** $\mathbf{\{f_1(\phi_j'),\ldots,f_n(\phi_j')\}}$

$\mathbf{invD_3}\left(\mathbf{m_{c*\varphi'}} ; \mathbf{s_{mc*\varphi'}} ; \mathbf{n_{3-random[0,1]}} \right)$ e $\mathbf{invD_3}\left(\mathbf{m_{c*\varphi'}} ; \mathbf{s_{c*\varphi'}} ; \mathbf{n_{3-random[0,1]}} \right)$ sono le funzioni inverse per valori di probabilità casuali rispettivamente della distribuzione statistica cumulata delle medie delle possibili popolazioni di campionamento dei valori $\boldsymbol{\phi'}$ campionari e della distribuzione statistica cumulata dei valori della popolazione di campionamento dei valori $\boldsymbol{\phi'}$ campionari con parametri coincidenti con quelli del campione complessivo

Le distribuzioni $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ e $\mathbf{D}_3$, nel caso delle eq. **32-a 32-b e 32-c** , riguardano distribuzioni di medie di possibili popolazioni di campionamento con parametri ricavati a partire a quelli campionari relativi ad un campione complessivo con cardinalità "**n***", generalmente **≤ 30** . Per semplificare una procedura di calcolo, piuttosto complessa, si suggerisce di assumere le distribuzioni $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ e $\mathbf{D}_3$ di tipo "*t*" di *Student* , tralasciando in questo caso altri tipi di distribuzioni più realistiche come la *log-normale* o la *PERT* .

Le distribuzioni $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ e $\mathbf{D}_3$ nel caso delle eq. **33-a 33-b e 33-c** , riguardano distribuzioni dei valori della popolazioni di campionamento con parametri coincidenti con quelli campionari. Per semplificare la procedura di calcolo, si suggerisce di assumere le distribuzioni $\boldsymbol{D_1}$, $\boldsymbol{D_2}$ e $\boldsymbol{D_3}$ di tipo *normale* di *Gauss*, tralasciando anche in questo caso altri tipi di distribuzioni più realistiche come la *log-normale* o la *PERT*.

$\mathbf{m_{c*-c's}}$ è la media del campione complessivo $\mathbf{c*_{-c's}}$ dei valori $\mathbf{c'_{s-i}}$, che rappresentano la parte casuale dei valori della tensione intercetta $\mathbf{c'_i}$

$\mathbf{s_{mc*-c's}}$ è la deviazione standard della media del campione complessivo $\mathbf{c*_{-c's}}$ dei valori $\mathbf{c'_{s-i}}$, che rappresentano la parte casuale dei valori della tensione intercetta $\mathbf{c'_i}$ **,** ed è pari a :
$\mathbf{s_{mc*-c's} = s_{c*-c's} / \sqrt{n*}}$

$\mathbf{s_{c*-c's}}$ è la deviazione standard del campione complessivo $\mathbf{c*_{-c's}}$ dei valori $\mathbf{c'_{s-i}}$, che rappresentano la parte casuale dei valori della tensione intercetta $\mathbf{c'_i}$ **.**

$\mathbf{m_{c'd}}$ è la media del campione dei valori $\mathbf{c_{c'd} = \{f_1(\phi_j'),\ldots,f_{Nc}(\phi_j')\}}$, che rappresentano la parte deterministica dei valori della tensione intercetta $\mathbf{c'_i}$, espressa tramite i valori assunti dalle equazioni delle linee di tendenza di ciascuno dei campione di misure $\mathbf{f_{\#}(\phi')}$, in corrispondenza di un valore $\boldsymbol{\phi_j'}$ fissato .

$\mathbf{s_{m\text{-}c'd}}$ è la deviazione standard della media del campione dei valori $\mathbf{c_{c'd} = \{f_1(\phi_j') ,\ldots,f_{Nc}(\phi_j')\}}$ per un valore $\boldsymbol{\phi_j'}$ fissato , ottenuta come : $\mathbf{s_{m\text{-}c'd} = s_{\text{-}c'd} / \sqrt{N_c^*}}$, dove $\mathbf{N_c}$ è il numero di campioni distinti di valori $\mathbf{c'_i}$

$\mathbf{s_{c'd}}$ è la deviazione standard del campione dei valori $\mathbf{c_{c'd} = \{f_1(\phi_j') ,\ldots,f_{Nc}(\phi_j')\}}$ per un valore $\boldsymbol{\phi_j'}$ fissato

$\mathbf{m_{c^*\text{-}\phi'}}$ è la media del campione complessivo $\mathbf{c^*_{\phi'}}$ dei valori $\boldsymbol{\phi'_i}$

$\mathbf{s_{mc^*\text{-}\phi'}}$ è la deviazione standard della media del campione complessivo $\mathbf{c^*_{\phi'}}$ dei valori $\boldsymbol{\phi'_i}$, ottenuta come : $\mathbf{s_{mc^*\text{-}\phi'} = s_{mc^*\text{-}\phi'} / \sqrt{n^*}}$, dove $\mathbf{n^*}$ è la cardinalità del campione complessivo $\mathbf{c^*_{\phi'}}$.

$\mathbf{s_{c^*\text{-}\phi'}}$ è la deviazione standard del campione complessivo $\mathbf{c^*_{\phi'}}$

$\mathbf{n_{j\#\text{-}RND[0,1]}}$ è un numero reale casuale , compreso nell'intervallo **[0 , 1]** , che esprime un possibile valore di probabilità

$\mathbf{PC_{\alpha°\text{-}inf}}$ è l' $\boldsymbol{\alpha°}$ percentile inferiore della successione di valori $\boldsymbol{\mu_{c'\text{-}j}}$ o $\mathbf{c'_{\text{-}j}}$

La semplificazione proposta nella scelta del tipo di distribuzioni $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$ e $\mathbf{D_3}$, viene considerata accettabile data in generale la maggiore variabilità del parametro "**c'** " rispetto all'angolo di resistenza a taglio "**ϕ'** ", rappresentando, inoltre, un contributo di resistenza costante all' aumentare delle tensioni normali "**σ'**" nell' espressione : $\boldsymbol{\tau' = c' + \sigma' \cdot \tan\phi'}$.

Il tipo di calcolo proposto , data la complessità, necessita di un applicazione informatica dedicata, e rappresenta un metodo di statistica inferenziale avanzato. Ove per esigenze di rapidità sia necessario operare un calcolo più semplice , si possono considerare "**c'** " e "**ϕ'** " come indipendenti , e calcolarne i valori caratteristici con metodi di statistica inferenziale semplificati, illustrati al capitolo **3 .**

6.2) Considerazioni sugli angoli di resistenza a taglio di picco ed a volume costante

Se si dispone oltre a campioni di misure dell'angolo di resistenza a taglio di picco "**ϕ'** ", anche di misure dell'angolo di resistenza a taglio a volume costante "$\boldsymbol{\phi'_{cv}}$", relative ad una stessa unità geotecnica, quest'ultimo campione, che non può essere composto con i campioni riferiti ai dati di picco, fornirà informazioni utili circa il valore minimo possibile per "**ϕ'** ", necessario per i metodi di statistica inferenziale applicabili alla distribuzione *log-nomale* o *PERT.* Ad esempio il valore minimo possibile può essere assunto pari al valore di "$\boldsymbol{\phi'_{cv}}$" corrispondente ad una probabilità di superamento "1-**α**" maggiore o uguale al **95% :** $\boldsymbol{\phi'_{cv\text{-}(1\text{-}\alpha)} = \phi'_{cv\text{-}(95\%)}}$, ricavabile da uno dei metodi illustrati al capitolo **5.**

6.3) Osservazioni sugli errori sistematici delle prove *triassiali* e di *taglio diretto*

Per quanto riguarda gli *errori sistematici* legati ai due di prove di resistenza a taglio, triassiale di tipo **CU** o **CD** e taglio diretto di tipo **CD**, come riportato in *T. W. Lambe, R. V. Withman - 1997* e *D. W. Taylor - 1939,* le prove a taglio diretto restituirebbero valori per l'angolo di resistenza a taglio maggiori di circa **2°** rispetto a quelli ricavati da prove triassiali sullo stesso terreno. A conclusioni del tutto opposte giunge lo studio illustrato in *B. A. Castellanos* e *T. L. Brandon – 2013,* relativamente alle argille di New Orleans, concludendo che i risultati delle due tipologie di prove tendono a divergere nei terreni anisotropi, come ad esempio i depositi alluvionali, mentre tendono a coincidere nei terreni isotropi. Ciò sarebbe dovuto al fatto che nella prova a taglio diretto la giacitura del piano di rottura è imposta, ed in genere orizzontale, mentre nelle prove triassiali non è predefinita. Da queste osservazioni non appare possibile determinare apriori l'*errore sistematico* relativo, tra i due diversi tipi prove. Non avendo, tantomeno, dati circa gli errori sistematici assoluti , relativi cioè alla distanza *media* delle misure dal valore reale, è lecito ipotizzare che il valore reale sia equidistante tra quelli determinati con i suddetti sistemi.

7) CONCLUSIONI

In questa pubblicazione si è cercato di affrontare molti dei problemi che si possono riscontrare nell'adozione del criterio statistico nella caratterizzazione dei parametri geotecnici, dall'interpretazione delle norme europee ed italiane, alla gestione di misure effettuate con sistemi diversi, fino alla soluzione di problemi legati all'applicazione di alcuni metodi avanzati di statistica inferenziale. Come risulta evidente, molte delle procedure proposte sono complesse e richiedono la realizzazione di applicazioni informatiche "ad hoc", che d'altronde, una volta disponibili, ne rendono molto semplice l'applicazione alle situazioni reali. E' probabile che nella maggior parte dei casi, i valori caratteristici così ottenuti, non si discostino in maniera rilevante da quelli ottenuti scegliendo i valori medi o estremi campionari. Tuttavia l'impiego delle procedure descritte garantisce sempre la formulazione di una "*stima cautelativa e ragionata*" che tiene conto di tutte le informazioni disponibili.

BOZZA

BIBLIOGRAFIA

T. W. Lambe , R.V. Whitman – "*Meccanica dei Terreni*" – Dario Flaccovio Editore 1997

D.W. Taylor – "*A Comparison of Results of Direct Shear and Cylindrical Compression Tests*" – Atti ASTM -1939

B.A. Castellanos , T.L. Brandon - "*A Comparison Between the Shear Strength Measured with Direct Shear and Triaxial Devices on Undisturbed and Remolded Soils*" - Proceedings of the 18th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Paris 2013

"*Angle of Friction*" - Geotechdata.info - http://geotechdata.info/parameter/angle-of-friction.html -2013

"*Eurocode 7: Geotechnical design – Part 1: General rules, Final draft pr. EN 1997-1*" - CEN 2004

"*Nuove Norme Tecniche per le Costruzioni e Circolare Esplicativa – D.M. Infrastrutture 14 gennaio 2008 – Circolare 02 febbraio 2009 n° 617/C.S.LL.PP.*" - DEI 2009

L. Nori - "*Introduzione Operativa al concetto dei Valori caratteristici secondo L'Eurocodice 7 (norma europea prEN1997-1)*" – Bozza Versione - 28 marzo 2009

S. Lacasse , F. Nadim , A. Rahim , T. R. Guttormsen – "*Statistical Description of Characteristic Soil Properties*" - Offshore Technology Conference 2007

D.V. Griffiths , G.A. Fenton – "*Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited* "

M.J. Panik – "*Statistical Inference - a short course*" - Wiley 2012

P.I.Good , J.W Hardin – "*Common Errors in Statics – 4th ed.* " – Wiley 2012

AA.VV. – "*Caso Probabilità e Statistica – Le Scienze Quaderni n.98* " - Le Scienze , Ottobre 1997

H.J. Bartsch – "*Manuale delle Formule Matematiche*" – Hoepli 1999

A. Piccato – "*Dizionario dei Termini Matematici*" – Rizzoli BUR 1987

C.E. Clark "*The PERT – Model for the distribution of an activity"* - Operations Research 10, pp. 405-406 - 1962

"*PERT distribution*" - Vose Software. – 2017 disponibile al seguente indirizzo web: https://www.vosesoftware.com/riskwiki/PERTdistribution.php

K. Krishnamoorthy , T.Mathew , G. Ramachandran - "*Generalized P-Values and Confidence Intervals: A Novel Approach for Analyzing Lognormally Distributed Exposure Data*"

K. Krishnamoorthy , Z. Zu - *"Confidence Limits for Lognormal Percentiles and for Lognormal Mean Based on Samples with Multiple Detection Limits"* - Oxford University Press on behalf of the British Occupational Hygiene Society 2010

K. Krishnamoorthy , T. Mathew - "*Inferences on the means of lognormal distributions using generalized p-values and generalized confidence intervals*" - 2001

T. B. Parkin , S. T. Chester, J. A. Robinson - "*Calculating Confidence Intervals for the Mean of a Lognormally Distributed Variable*"

BOZZA

E. Limpert, W. A. Stahel, M. Abbt - "*Log-normal Distributions across the Sciences: Keys and Clues*" - BioScience May 2001 / Vol. 51 No. 5

K. Cimermanová - *"Estimation of Confidence Intervals for the Log-normal Means and for the Ratio and the Difference of Log-normal Means with Application of Breath Analysis"*- Measurement Science Review, Volume 7, Section 1, No. 4, 2007

C. E. Land - "*Confidence intervals for linear functions of the normal mean and variance,*" - Annals of Mathematical Statistics, 42, 1187-1205 - 1971

X.H. Zhou , S. Gao, , "*Confidence intervals for the log-normal mean,*" - Statistics in Medicine, 16, 783-790 – 1997

U. Olsson - "*Confidence Intervals for the Mean of a Log-Normal Distribution*" - Journal of Statistics Education, 13:1, , DOI: 10.1080/10691898.2005.11910638 - 2005

Questa pubblicazione ha fini esclusivamente illustrativi e non commerciali

Quest'opera è distribuita con Licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

BOZZA